

2018년 1학기 수학 및 연습 1 채점기준.

#1. $\vec{XA} = (1-2t, 2-t, 3-2t)$
 $\vec{XB} = (-2t, 1-t, 2-2t)$
 $\vec{XC} = (1-2t, -1-t, 1-2t)$

$\vec{XA}, \vec{XB}, \vec{XC}$ 가 일차 종속이다. $\Leftrightarrow \det(\vec{XA}, \vec{XB}, \vec{XC}) = 0$ ① 5점

$$\det(\vec{XA}, \vec{XB}, \vec{XC}) = \det \begin{pmatrix} 1-2t & -2t & 1-2t \\ 2-t & 1-t & -1-t \\ 3-2t & 2-2t & 1-2t \end{pmatrix}$$

①행-②행
 $= \det \begin{pmatrix} 1 & -2t & 1-2t \\ 1 & 1-t & -1-t \\ 1 & 2-2t & 1-2t \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{②행}-\text{③행}} \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1-2t \\ 1 & 2 & -1-t \\ 1 & 1 & 1-2t \end{pmatrix}$

②행-①행 & ③행-①행
 $= \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1-2t \\ 0 & 3 & -2+t \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = -2(-2+t) = 4-2t$

$\therefore t=2, \Leftrightarrow 4-2t=0 \Leftrightarrow \det(\vec{XA}, \vec{XB}, \vec{XC})=0 \dots \text{②}$

①, ②에 의해, $t=2$. 20점

다른 풀이: $\vec{XA}, \vec{XB}, \vec{XC}$ 가 일차 종속이다.

$\Leftrightarrow a\vec{XA} + b\vec{XB} + c\vec{XC} = \vec{0}$ 이고, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ 인 실수 a, b, c 가 존재한다. 5점

$$\begin{cases} a(1-2t) + b(-2t) + c(1-2t) = 0 \dots \text{①} \\ a(2-t) + b(1-t) + c(-1-t) = 0 \dots \text{②} \\ a(3-2t) + b(2-2t) + c(1-2t) = 0 \dots \text{③} \end{cases}$$

③-①: $2a+2b=0 \dots \text{④}$ $2 \times \text{②} - \text{①}: 3a+2b-3c=0 \dots \text{⑤}$

④ & ⑤ $\Rightarrow \boxed{a=-b \ \& \ a=3c}$ ⑥ 그런데, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ 이므로, $\boxed{a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0}$ ⑦

⑥을 ①에 대입: $3c(1-2t) - 3c(1-2t) + c(1-2t) = 0 \Rightarrow c(4-2t) = 0$.

⑦에 의해, $c \neq 0$ 이므로, $t=2$. 20점

* 두번째 풀이에서 ㉠을 안보이고 답만 맞을 경우, -10 점.

* // 시각부분에 $\vec{XC} = p\vec{XA} + q\vec{XB}$ 꼴로 시작한
경우에도 -10 점. ($a\vec{XA} + b\vec{XB} + c\vec{XC} = 0$ 에서 $c \neq 0$ 임을 보이기)
(많은 채 시각한 경우, 즉 ㉠을 보이지 않은 경우와 동일하므로)

* 답이 틀리면 위의 점수 15 점은 없음.

* A, B, C가 만드는 평면의 방정식을 구한 후, X가 그 평면 위에 있어야
한다고 논증한 경우, 평면의 방정식 $x+2y-3z=-4$ 가 맞았으나
답만 틀린 경우 15점.

2. 두 평면 $2x - y + z = 1$, $y + z = 0$ 의 교선의 방향벡터는 +10점

$(2, -1, 1) \times (0, 1, 1) = (-2, -2, 2)$ 이다. (또는 이와 평행하다.)

직선 $2x = 6y - 6 = 3z$ 는 $\frac{x}{3} = y - 1 = \frac{z}{2}$ 로 나타낼 수 있고

이 방향벡터는 $(3, 1, 2)$ 이다.

따라서 구하려는 평면의 법선벡터는 +5점

$(-2, -2, 2) \times (3, 1, 2) = (-6, 10, 4)$ 이다. (또는 이와 평행하다.)

이 평면은 $2x = 6y - 6 = 3z$ 를 포함하고, 따라서

$(0, 1, 0)$ 을 포함한다. 그러므로 평면의 방정식은 +5점

$(-3, 5, 2) \cdot ((x, y, z) - (0, 1, 0)) = -3x + 5(y - 1) + 2z = 0$ 이다.

* 채점 기준: 교선의 방정식이 틀려도 방향벡터만 맞으면 +10점.

평면의 방정식과 동치인 다양한 표현들은 모두 인정.

Ex $\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{p}) = 0$, $\vec{p} + t\vec{u} + s\vec{w}$, ...

#3 f 는 두선형사상 g, h 의 합성이므로 선형사상이다.

선형사상 f, g, h 에 해당하는 행렬을 각각

A, B, C 라 하자.

$$g\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

f, g 각각 5점

$$f = g \circ h \rightarrow A = BC \rightarrow C = B^{-1}A$$

5점

$$C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

5점.

* $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 라 두고, 행렬연산이 아닌 연립방정식으로 풀 경우

답 맞아야 마지막 10점 부여

4.(a)

$$L(X) = X - P_n(X) \quad (n=(1,1,1))$$

$$= X - \frac{n \cdot X}{n \cdot n} n \quad \text{+5}$$

$$= (x_1, x_2, x_3) - \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} (1, 1, 1)$$

$$= \left(\frac{2x_1 - x_2 - x_3}{3}, \frac{-x_1 + 2x_2 - x_3}{3}, \frac{-x_1 - x_2 + 2x_3}{3} \right) \quad \text{+5}$$

$$L(X + cZ) = (X + cZ) - \frac{n \cdot (X + cZ)}{n \cdot n} n$$

$$= \left(X - \frac{n \cdot X}{n \cdot n} n \right) + c \left(Z - \frac{n \cdot Z}{n \cdot n} n \right)$$

$$= L(X) + cL(Z) \quad \text{이므로 } L \text{ 은 선형사상 } \quad \text{+5}$$

$$4(b) \quad L \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad L \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad L \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{이므로 } L \text{ 에 대응되는 행렬 } A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad \text{+5}$$

$$A^2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}^2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = A$$

$$\text{이므로 } A^{10} = A \quad \text{+5}$$

※ $L(x)$ 를 잘못 구해서 풀 경우 해당문제 0점

4(a) 선형사상임을 보일 때

$$L(x+z) = L(x) + L(z) \text{ 또는 } L(cx) = cL(x)$$

둘중 하나만 보일 경우 2점감점

4(a) 선형사상임을 보일 때

$L(x + cz)$ 를 전개하여 설명하지 않을 경우
해당부분 0점

4(b) $A^0 = A$ 임을 보일 때

L 이 정사영임을 이용하여 $A^2 = A$ 를 설명해도
정답인점

$A^0 = A$ 임을 보일 때.

A 를 잘못 구해서 $A^2 = A$ 임을 계산하면 0점
다만 A 를 잘못 구해도 정사영임을 이용하여
 $A^2 = A$ 임을 설명하면 5점

5번 (a)

$$GAG^{-1} + I = GAG^{-1} + GG^{-1} = G(A+I)G^{-1}$$

$$\det(GAG^{-1} + I) = \det(G(A+I)G^{-1}) = \det G \det(A+I) (\det G)^{-1} \\ = \det(A+I)$$

$$\therefore \det(A+I) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix} = -3$$

(b)

$$I = A^2 + AB + A + B = (A+I)(A+B)$$

$$\det(A+I) \cdot \det(A+B) = \det(I) = 1$$

$$\therefore \det(A+B) = \frac{1}{\det(A+I)} = -\frac{1}{3}$$

(a) $\det(GAG^{-1} + I) = \det(A+I)$ 임을 명시하거나 증하는 식이 필요
기준 과정이 맞고 계산이 맞으면 10점, 계산 실수 시 5점
풀이 과정에서 수학적 오류가 있으면 0점
(ex) $GAG^{-1} = GG^{-1}A$, $GAG^{-1} + I = A+I$ etc)

(b) $(A+B)(A+I) = I$ 라고 쓰는 경우 충분한 설명이 없으면 0점
기준 (a)에서 올바른 계산 결과가 나오지 않아도
 $\det(A+B) = \frac{1}{\det(A+I)}$ 까지 적으면 10점 인정
수학적 오류가 있으면 0점

#6. 풀이(1)
 $A = (0, 1, 2), B = (1, 2, 3), C = (1, 3, 5), D = (1, 4, 11)$
 $\vec{AB} = (1, 1, 1), \vec{AC} = (1, 2, 3), \vec{AD} = (1, 3, 9)$

이때, 점 A, B, C, D 를 꼭짓점으로 하는 사면체의 부피는

$$V = \frac{1}{6} | \det(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) | \dots \dots \textcircled{1}$$

이제, 이를 계산하면,

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = \frac{2}{3} \dots \dots \textcircled{2}$$

이다.

풀이(2)

① $\triangle ABC$ 의 넓이.

$$\triangle ABC \text{ 의 넓이} = \frac{1}{2} | \vec{AB} \times \vec{AC} | = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

② 높이.

~~이~~ $\triangle ABC$ 를 포함하는 평면의 방정식은 $x - 2y + z = 0$ 이고, 이 평면과 점 D 사이의 거리는 $\frac{4}{\sqrt{6}}$ 이다.

③ 부피.

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ 로 부터, 부피 } V \text{ 는 } \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{2}{3} \text{ 이다.}$$

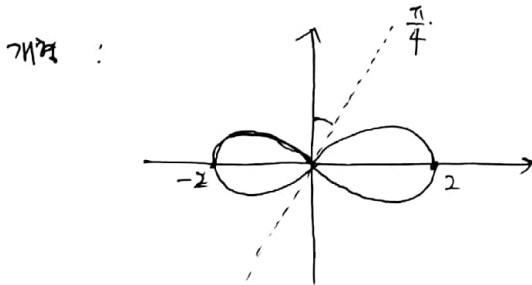
* 채점 기준.

- 1) 풀이 (1) 로 풀 경우, 부피 공식 ① 을 "틀바르게" 적으면 10점, 그 외 0점.
- 2) " , ② 를 "틀바르게" 계산해도 10점, 그 외 0점.
- 3) " , ^{단라도} 식별이 틀리지 ~~틀리지~~ 백터표현이 맞으면 10점.
- 4) 풀이 (2) 로 풀 경우, 점의 선택에 무관하게 계산이 맞으면 10점.

7- (a) $x^2+y^2 = 2\sqrt{x^2-y^2}$ 에 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 를 넣어

$r^2 = 2\sqrt{r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}$, ~~or~~

$\Rightarrow |r| = 2\sqrt{\cos 2\theta}$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \leq \theta \leq 2\pi$)



7- (b) 넓이 $S = 4 \times \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2} r^2 d\theta = 4 \times \int_0^{\pi/4} 2 \cos 2\theta d\theta = 8 \int_0^{\pi/4} \cos 2\theta d\theta$
 $= 8 \left[\frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\pi/4} = 4$

(채점 기준) (a) $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 를 넣어서 $r^2 = 2\sqrt{r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}$ 라는
 같은 식이 있으면 5점 ($r = 2\sqrt{\cos 2\theta}$ 도 인정). 없으면 0점

개형이 맞으면 5점 (x-축, y-축의 적면 등은 표기하지 않아도 5점)

그러나 잘못된 표기를 하면 3점, 개형이 틀리면 0점

(b) 적분식이 $\int \frac{1}{2} r^2 d\theta$ 를 이용한 것이 보이면, 혹은 $\int \frac{1}{2} r^2 d\theta$ 라는 식을 썼으면 3점
 위 식에 정확한 $r(\theta)$ 식과, 방위각 넣어서 $(4 \times \int_0^{\pi/4} \dots$ or $2 \times \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \dots$ or $\int_0^{\pi/4} \dots + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \dots + \int_{\frac{7\pi}{4}}^{2\pi} \dots$)
 맞은 식을 쓴다면 5점

계산실수 없이 정확한 답을 구하면 10점

(넓이 식 자체를 알지거나, 아예 공인 길이 식, $\int d\theta$ 같은 식을 쓰면 0점)
 (다른 과목에서는)

* (a)에서 8점 미만의 점수는 받았을시 (b)는 다 맞더라도 3점.

$$8. X(t) = \left(\frac{\sin 2t}{2}, \frac{1 - \cos 2t}{2}, \cos t \right)$$

$$X'(t) = (\cos 2t, \sin 2t, -\sin t)$$

$$X''(t) = (-2\sin 2t, 2\cos 2t, -\cos t)$$

$$t = \pi \text{ 때임. } X(\pi) = (0, 0, -1)$$

$$X'(\pi) = (1, 0, 0) \quad \downarrow +5\text{점}$$

$$X''(\pi) = (0, 2, 1) \quad \downarrow +5\text{점}$$

$$\text{접선의 방정식: } X(\pi) + tX'(\pi) = (t, 0, -1)$$

$$\Leftrightarrow y = 0, z = -1 \quad \downarrow +5\text{점}$$

$$\text{접축 평면 방정식: } X(\pi) + sX'(\pi) + tX''(\pi) = (s, 2t, t-1)$$

$$\Leftrightarrow y = 2z + 2 \quad \downarrow +5\text{점}$$

○ $X'(\pi)$ 틀리게 구했을 시 접선의 방정식 맞도록 해당 부분 0점.
(단, $X'(\pi) = (-1, 0, 0)$ 이라고 구한 경우 예외.)

○ $X''(\pi)$ or $X'(\pi)$ 틀리게 구했을 시 접축 평면 맞게 구해도 0점.

#9. <해상기판>

(a) . $X'(t), X''(t)$ 계산 \rightarrow 3점

. $S = |X'(t) \times X''(t)|$ 임을 대입 혹은 이용하면 \rightarrow 3점

. 올바르게 답 구하면 \rightarrow 4점.

(b) $\left\{ \begin{aligned} \tilde{X}'(s) \times \tilde{X}''(s) &= (g'(s))^3 X'(g(s)) \times X''(g(s)) \\ |\tilde{X}'(s) \times \tilde{X}''(s)| &= 8 \cosh^3 s \sqrt{16 \sinh^2 s + 5} \end{aligned} \right.$

중 하나라도 포함하면, 5점

계산 가능 없이 올바르게 식을 대입하면, 5점

<풀이>

(a) $X'(t) = (-\sin t, \cos t, 2t)$, $X''(t) = (-\cos t, -\sin t, 2)$

$$\begin{aligned} \text{평행선상벡터곱} &= |X'(t) \times X''(t)| \\ &= |(2\cos t + 2t\sin t, 2\sin t - 2t\cos t, 1)| = \sqrt{4t^2 + 5} \end{aligned}$$

(b) $\tilde{X}'(s) = X'(g(s)) g'(s)$

$\tilde{X}''(s) = X''(g(s)) (g'(s))^2 + X'(g(s)) g''(s)$

$|\tilde{X}'(s) \times \tilde{X}''(s)| = |g'(s)|^3 |X'(g(s)) \times X''(g(s))|$

$\stackrel{\uparrow}{=} 8 \cosh^3 s \sqrt{5 + 16 \sinh^2 s} \rightarrow$ 우항 $\&$ $s \geq 0$ 이기 증가함수

$s=0$ 이기 치수값. 답: $8\sqrt{5}$

문제 10)

(a) $X'(t) = (e^t(\cos t - \sin t), e^t(\sin t + \cos t))$

$|X'(t)| = \sqrt{2} e^t$

$s(t) = \int_0^t |X'(u)| du = \int_0^t \sqrt{2} e^u du = \sqrt{2} e^t - \sqrt{2} \quad \downarrow +3$

$t = \log(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} s) = g(s) \quad \downarrow +3$

$\tilde{X}(s) = ((1 + \frac{1}{\sqrt{2}} s) \cos(\log(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} s)), (1 + \frac{1}{\sqrt{2}} s) \sin(\log(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} s))) \quad \downarrow +3$
 $s \geq 0 \quad \downarrow +1$

(b) $K(t) = \frac{1}{|X'(t)|} \left(\frac{X'(t)}{|X'(t)|} \right)' \quad \downarrow +5$

$= \frac{1}{\sqrt{2} e^t} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (\cos t - \sin t, \sin t + \cos t)' \right)$

$= \frac{1}{2 e^t} (-\sin t - \cos t, \cos t - \sin t)$

$K(t) = |K(t)| = \frac{1}{2 e^t} \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2} e^t}$

$|X(t)| = e^t$ 이므로 $K(t) = \frac{1}{\sqrt{2} |X(t)|} \quad \downarrow +5$

• 곡률 혹은 곡률벡터의 정의식을 정확히 썼으면 +5

• 이와 정답까지의 논리에 틀린 점이 없으면 +5

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot \left| \frac{1}{|X'(t)|} \left(\frac{X'(t)}{|X'(t)|} \right)' \right| \\ \cdot \frac{|X''y' - X'y''|}{((X')^2 + (Y')^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \cdot 기타 교재에 나온 식도. \end{array} \right.$$