

**수학 및 연습 1 기말고사**  
(2017년 6월 10일 오후 1:00-3:00)

학번:	이름:
-----	-----

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

**문제 1.** [25점] 좌표공간의 점  $A$  를 지나고 단위벡터  $\mathbf{v}$  와 나란한 직선을  $\ell$  이라고 하자. 각각의 점  $P \in \mathbb{R}^3$  를  $P$  에서 직선  $\ell$  에 내린 수선의 발에 대응시켜주는 사상을  $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  라고 할 때 다음 물음에 답하시오.

- (a) (15점)  $\Phi(P)$  를  $A, \mathbf{v}, P$  를 이용하여 표현하시오.
- (b) (10점) 사상  $\Phi$  가 선형사상이기 위한 필요충분조건은 직선  $\ell$  이 원점을 지나는 것임을 보이시오.

**문제 2.** [15점] 선형사상  $L : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ 와  $\mathbb{R}^4$  의 영벡터가 아닌 벡터  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ 가 다음을 만족한다고 하자.

$$L(\mathbf{v}_1) = 2\mathbf{v}_1, \quad L(\mathbf{v}_2) = 0\mathbf{v}_2, \quad L(\mathbf{v}_3) = 1\mathbf{v}_3, \quad L(\mathbf{v}_4) = 7\mathbf{v}_4.$$

이 때, 벡터  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ 가 일차독립임을 보이시오.

**문제 3.** [20점] 차수가  $n$  이하인 실수 계수 다항식 전체 집합을  $P_n$  이라 두고,  $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  를 벡터  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  과 같이 보았을 때 선형사상  $T : P_3 \rightarrow P_4, p(x) \mapsto (x-1)p(x) + p'(x)$  에 대응되는 행렬을 구하시오.

**문제 4.** [30점] 선형사상  $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 에 의한  $\mathbb{R}^3$ 의 벡터  $\mathbf{a} = (1, -1, 0), \mathbf{b} = (2, -1, 0), \mathbf{c} = (3, 0, 1)$  의 상이

$$L(\mathbf{a}) = (1, -2, 0), \quad L(\mathbf{b}) = (1, -5, 0), \quad L(\mathbf{c}) = (1, 0, 7)$$

이라고 할 때 다음 물음에 답하시오.

- (a) (15점)  $L(1, 0, 0), L(0, 1, 0), L(0, 0, 1)$ 과 선형사상  $L$ 에 대응하는 행렬  $A$ 를 구하시오.
- (b) (15점)  $L(0, 0, 0), L(1, 0, 0), L(0, 1, 0), L(0, 0, 1)$ 으로 이루어진 사면체의 부피  $V$ 를 구하시오.

**문제 5.** [20점] 좌표공간의 세 벡터  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 에 대하여  $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 3$  일 때 다음을 구하시오.

- (a) (10점)  $\mathbf{a} \cdot (2\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (3\mathbf{b} + 5\mathbf{c})$
- (b) (10점)  $(2\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \{(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times (\mathbf{c} \times 2\mathbf{a})\}$

**문제 6.** [20점] 좌표공간의 곡선  $X(t) = (e^t, \sin(2t + \pi), \log(t^2 + e))$  위의 점  $(1, 0, 1)$  에서 접축평면의 방정식을 구하시오.

**문제 7.** [20점] 좌표평면 위에 있는 사이클로이드 곡선  $X(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t), (0 \leq t \leq 2\pi)$  에 대하여 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점) 곡선  $X$  의 길이를 구하시오.
- (b) (10점) 좌표평면 위에서 정의된 함수  $f(x, y) = x$  에 대하여 선적분  $\int_X f \, ds$  를 구하시오.

**문제 8.** [20점] 좌표평면 위에 있는 곡선  $X(t) = e^{\sqrt{t}}(\cos \sqrt{t}, \sin \sqrt{t}), (t \geq 1)$  의 호의 길이에 의한 매개화  $\tilde{X}(s)$  를 구하시오. (단, 매개화된 곡선  $\tilde{X}(s)$  가  $\tilde{X}(0) = e(\cos 1, \sin 1)$  을 만족한다.)

**문제 9.** [30점] 다음 물음에 답하시오.

- (a) (15점) 좌표공간의 이급 정규곡선  $X(t)$  와 곡률벡터  $\kappa(t)$  에 대하여 다음의 등식이 성립함을 보이시오.

$$\kappa(t) = \frac{1}{|X'(t)|^2} \{X''(t) - P_{X'(t)}(X''(t))\}$$

(단,  $P_{\mathbf{v}}(\mathbf{w})$  는 벡터  $\mathbf{w}$  의 벡터  $\mathbf{v}$  위로의 정사영을 말한다.)

- (b) (15점) 곡선 위의 한 점  $Q = X(0) = (1, 0, 1)$  에 대하여  $Q$  에서의 속도벡터와 가속도벡터가 각각  $X'(0) = (1, 2, 1), X''(0) = (-1, 2, 1)$  라고 하자. (a)를 이용하여 곡선  $X$  의 점  $Q$  에서의 접축원의 중심을 구하시오.