2017년 1학기 수학 및 연습 1 기말고사 채점기준

1. (a) $\Phi(P) = A + P_v(\overrightarrow{AP}) = \boxed{A + \{(P-A)\cdot v\} v}$

혹은, $A - \{(A-P)\cdot v\} v$, $A + \dfrac{(P-A)\cdot v}{v \cdot v} v$,

기준 : case ① 답 ($\Phi(P)$)이 맞으면 과정과 관계 없이 15점.

case ② 답이 틀린 경우 ;

정사영 $P_v(\overrightarrow{AP}) = (\overrightarrow{AP}\cdot v) v$ 또는 $P_v(\overrightarrow{OP}) = P_v(\vec{P}) = (P\cdot v) v$ 을 바르게 구했거나, 이 항이 풀이에 등장하면 부분점수 10점 인정 이 외는 0점.

(b) ※ (a)에서 $\Phi(P)$를

정답대로 $\Phi(P) = A + ((P-A)\cdot v)v$ 로 구했거나

$\pm P$ 만큼 차이 나게 구한 경우 ($\Phi(P) = (A \pm P) + ((P-A)\cdot v)v$)

에 한하여, (b)를 채점.

여기서 벗어난 경우 (b)는 답안에 관계없이 0점.

($\Rightarrow$) Φ 선형사상 $\Rightarrow$ l이 원점 지남.

$$\begin{aligned}\Phi(P+cQ) &= A + \{(P+cQ-A)\cdot v\}v \\ &= A + \{(P-A)\cdot v\}v + c\{A+(Q-A)\cdot v\}v \\ &\quad - \{cA - (cA\cdot v)v\} \\ &= \Phi(P) + c\,\Phi(Q) - c\underline{\{A-(A\cdot v)v\}}\end{aligned}$$

이므로, Φ가 선형사상이라는 가정으로부터

$A - (A\cdot v)v = 0$. 즉, $\underline{A = P_v(A)}$

이므로, $\underline{A\text{와 } v\text{는 나란하다. } (A=0 \text{ 도 가능})}$.

따라서 $A + tv = 0$ 인 실수 t 존재. l은 원점 지남.

$(\Leftarrow)$ Φ 선형사상 $\Leftarrow$ l이 원점 지남.

$l : \{A + tv \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\}$ 이 원점을 지나므로,

$A = 0$ 으로 두고 풀어도 된다. 그러면

$\Phi(P) = (P \cdot v)v$

$$\begin{aligned}\Phi(P + cQ) &= ((P + cQ) \cdot v)v \\ &= (P \cdot v)v + c(Q \cdot v)v \\ &= \Phi(P) + c\,\Phi(Q)\end{aligned}$$

가 성립하여 Φ는 선형사상.

기준 : $(\Rightarrow)$, $(\Leftarrow)$ 각 5점.

각 경우 내에서 부분점수 없음.

특히, $(\Rightarrow)$ 부분에서

$A = 0$ 만을 도출한 경우, $(\Rightarrow)$ 부분 0점.

문제 2.

a, b, c, d : $aV_1 + bV_2 + cV_3 + dV_4 = 0$ ⋯ ①

①의 양 변에 L, L^2, L^3을 적용하면 ($L^2 = L \circ L$, $L^3 = L \circ L^2$)

$2aV_1 + 0 + cV_3 + 7dV_4 = 0$ ⋯ ②

$4aV_1 + 0 + cV_3 + 49dV_4 = 0$ ⋯ ③

$8aV_1 + 0 + cV_3 + 343dV_4 = 0$ ⋯ ④

④−③에서 $4aV_1 + 294dV_4 = 0$ ⋯ ⑤

③−②에서 $2aV_1 + 42dV_4 = 0$ ⋯ ⑥

⑤, ⑥에서 $dV_4 = 0$, $V_4 \neq 0$이므로 $d = 0$ ⋯ ⑦

⑤, ⑦ → $a = 0$ ⋯ ⑧, ⑦, ⑧, ③ → $c = 0$ ⋯ ⑨

⑦, ⑧, ⑨, ① → $b = 0$

배점.

1. ①에서 a, b, c, d 중 하나를 아무 설명 없이 0 아닌 실수로 두는 경우 10점 감점.

2. 큰 계산 실수가 있으면 10점 감점.

3. $T(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)$

10점

$=(-a_0+a_1)+(a_0-a_1+2a_2)x+(a_1-a_2+3a_3)x^2+(a_2-a_3)x^3+a_3x^4$

(또는, $a_0(x-1)+a_1(x^2-x+1)+a_2(x^3-x^2+2x)+a_3(x^4-x^3+3x^2)$
으로 정리해도 됨.)

or, in vector notation, $T(a_0,a_1,a_2,a_3)$

$=(-a_0+a_1,a_0-a_1+2a_2,a_1-a_2+3a_3,a_2-a_3,a_3)$

10점

$\therefore$ 행렬 : $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 10점 (답이 맞으면 20점)

* $T: P_3 \to P_4$ 가 아니라, 일반적인 n에 대해 $T: P_n \to P_{n+1}$에 대응하는 행렬을 구한 경우 각 항목 × 50% 의 점수

* $T(e_1)=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $T(e_2)=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $T(e_3)=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $T(e_4)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

로 계산한 경우도, 계산이 맞으면 부분점수 10점.

* 2차 다항함수로 계산한 경우 (즉, $T: P_2 \to P_3$) 0점.

4.

(a). $L(1,0,0) = (0, -3, 0)$ … 4점.

$L(0,1,0) = (-1, -1, 0)$ … 4점.

$L(0,0,1) = (1, 9, 7)$ … 4점.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$ … 3점

(b). 부피 $V = \frac{1}{6}|\det A| = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$.

※ 부피를 구하는 식 $\frac{1}{6}|\det A|$ 을 쓰면 5점.

※ $|\det A| = |-21| = 21$ … 5점.

※ $\det A = 21$ 이라 쓰면 0점.

(별해).

xy 평면 위의 삼각형의 넓이 $\frac{3}{2}$: … 5점

높이 7. … 5점

부피 $V = \frac{3}{2} \times 7 \times \frac{1}{3} = \frac{7}{2}$. … 5점

5 (a) $a\cdot(2a+b)\times(3b+5c)$

$$= \det(a,\ 2a+b,\ 3b+5c)$$ 5

$$= \det(a,\ b,\ 5c)$$

$$= 5\det(a,\ b,\ c) = 15.$$ 10

(b)

$$(b\times c)\times(c\times 2a) = \{2a\cdot(b\times c)\}c - \{c\cdot(b\times c)\}2a$$

$$= 6c$$

$$\therefore (2a\times b)\cdot\{(b\times c)\times(c\times 2a)\}$$

$$= (2a\times b)\cdot 6c = 12\det(a,b,c) = 36.$$ 10

※ (b)번에서 설명이 부족하거나 틀린 식을 사용하면 0점.
특히, 특정한 a, b, c를 잡아 계산할시 0점.

#6. $x'(t) = \left(e^t,\ 2\cos(2t+\pi),\ \dfrac{2t}{t^2+e}\right)$ ┘+5

$x''(t) = \left(e^t,\ -4\sin(2t+\pi),\ \dfrac{-2t^2+2e}{(t^2+e)^2}\right)$ ┘+5

$t=0$ 일때 $x(0) = (1,0,1)$ 이므로, $t=0$ 일때 접촉평면의 방정식을 구하면 된다.

$x'(0) = (1,-2,0)$

$x''(0) = \left(1,0,\dfrac{2}{e}\right)$

그러므로 접촉평면의 법선 벡터 $\vec{n}$은

$\vec{n} = x'(0) \times x''(0) = \left(-\dfrac{4}{e}, -\dfrac{2}{e}, 2\right)$

$\therefore$ 접촉평면의 방정식:

$(x'(0) \times x''(0)) \cdot ((x,y,z) - (1,0,1)) = 0$

$\Rightarrow \left(-\dfrac{4}{e}, -\dfrac{2}{e}, 2\right) \cdot (x-1, y, z-1) = 0$ ┘+5

$\Rightarrow 2x + y - ez = 2-e$

(또는, 접촉평면의 정의에 의해

$\{ x(0) + a x'(0) + b x''(0) \mid a,b \in \mathbb{R} \}$

$= \{ (1+a+b,\ -2a,\ 1+\dfrac{2b}{e}) \mid a,b \in \mathbb{R} \}$) ┘+5

※ $x'(t)$, $x''(t)$ 정확하게 구하지 않은 시 감점.

7. (a).

$$\text{length}(X) = \int_0^{2\pi} |X'(t)|\,dt$$ 정의 : +2점

$$|X'(t)| = |(1-\cos t,\ \sin t)|$$
$$= \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}$$
$$= \sqrt{2 - 2\cos t}$$
$$= 2\left|\sin\frac{t}{2}\right|$$

$0 \le t \le 2\pi$ 이므로 $\sin\frac{t}{2} \ge 0$.

$$\therefore\ \text{length}(X) = \int_0^{2\pi} 2\sin\frac{t}{2}\,dt$$
$$= \left[-4\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}$$
$$= 8.$$

계산실수 없이 정답 : +8점

7. b)

Sol 1) $\int_X f\,ds = \int_0^{2\pi} (t - \sin t)\cdot |X'(t)|\,dt$

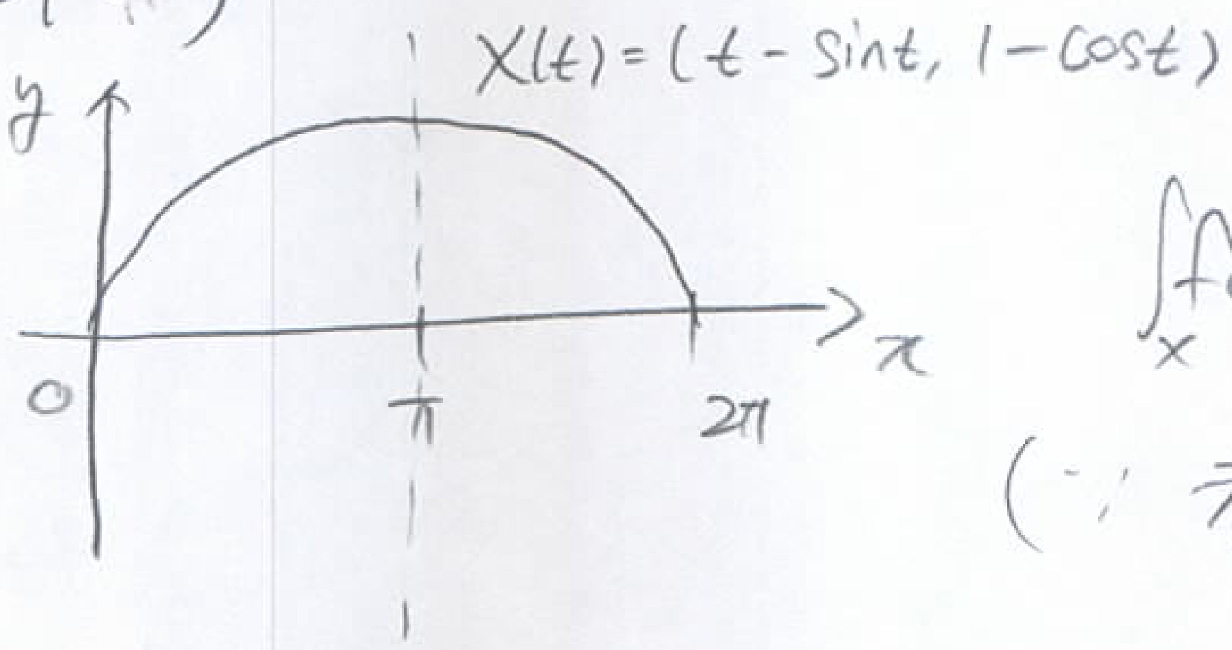
$= \int_0^{2\pi} (t - \sin t)\cdot 2\sin\left(\frac{t}{2}\right) dt$ +2점

$= \int_0^{2\pi} \left(2t\sin\left(\frac{t}{2}\right) - 2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right) dt$

$= \left[-4t\cos\left(\frac{t}{2}\right) + 8\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{2\pi} - 0$ $2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)$ 가 $(\pi, 0)$ 점대칭

$= 8\pi$ +8점

Sol 2)



$\int_X f\,ds = \int_X x\,ds = l\bar{x} = 8\pi$

$(\because\ \bar{x} = \pi,$ a)에서 $l = 8)$ +10점

#8. $X(t)=e^{\sqrt{t}}(\cos\sqrt{t}, \sin\sqrt{t})\quad (t\geq 1)$

$$\Rightarrow X'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}e^{\sqrt{t}}(\cos\sqrt{t}, \sin\sqrt{t})+e^{\sqrt{t}}\left(-\frac{1}{2\sqrt{t}}\sin\sqrt{t}, \frac{1}{2\sqrt{t}}\cos\sqrt{t}\right)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{t}}e^{\sqrt{t}}(\cos\sqrt{t}-\sin\sqrt{t}, \sin\sqrt{t}+\cos\sqrt{t})$$

$$\Rightarrow |X'(t)|=\frac{1}{2\sqrt{t}}e^{\sqrt{t}}\sqrt{(\cos\sqrt{t}-\sin\sqrt{t})^2+(\sin\sqrt{t}+\cos\sqrt{t})^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2t}}e^{\sqrt{t}}$$

∴ 호의 길이 $s(t)=\int_1^t |X'(u)|\,du$ 5점 ①

$$=\int_1^t \frac{1}{\sqrt{2u}}e^{\sqrt{u}}\,du$$

$$=\sqrt{2}\,e^{\sqrt{u}}\Big|_1^t$$

$$=\sqrt{2}\,(e^{\sqrt{t}}-e)$$ 5점 ②

$$\Leftrightarrow \sqrt{t}=\log\left(e+\frac{s}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\therefore \tilde{X}(s)=\left(e+\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\left(\cos\left(\log\left(e+\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right), \sin\left(\log\left(e+\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right)\right). \quad (s\geq 0)$$

③ 10점

※ 채점기준

① $e(\cos 1, \sin 1)$ 부터의 호의 길이를 구하는 식 $s(t)=\int_1^t |X'(u)|\,du$ 를 정확히 적으면 5점

- 만일 적분구간을 0부터로 하여 계산한 경우, $t=0$부터는 곡선이 정의되지 않으므로 0점
- 위 식 대신 $|X'(u)|$에 실제 계산한 속력을 대입한 경우에도 5점
- 위 식 대신 부정적분으로 표현하였거나, 적분구간을 c부터로 하여 계산한 경우, ②의 호의 길이를 정확하게 구한 경우 ①+② 하여 10점, 정확하게 구하지 못한 경우 0점.

② 호의 길이 $s(t) = \sqrt{2}(e^{\sqrt{t}} - e)$ 를 정확히 구한 경우 5점.

③ 호의 길이로의 재매개화 $\tilde{X}(s) = \left(e + \frac{s}{\sqrt{2}}\right)\left(\cos\left(\log\left(e+\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right), \sin\left(\log\left(e+\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right)\right)$ 를 정확히 구한 경우 10점.

※ 별해

1) $\sqrt{t} = \theta$ 로 치환한 경우 ($X(t) = Y(\theta)$ 로 표기)

$Y(\theta) = e^{\theta}(\cos\theta, \sin\theta) \quad (\theta \geq 1)$

$\Rightarrow Y'(\theta) = e^{\theta}(\cos\theta - \sin\theta, \sin\theta + \cos\theta)$

$\Rightarrow |Y'(\theta)| = \sqrt{2}e^{\theta}$

$\therefore s(\theta) = \int_1^{\theta} \sqrt{2}e^{\varphi}\,d\varphi = \sqrt{2}(e^{\theta} - e) = \sqrt{2}(e^{\sqrt{t}} - e)$ (이하 동일)

2) 위처럼 치환한 경우에, $Y(\theta)$ 를 극좌표 위의 곡선 (e^{θ}, θ) 로 이해하면

$s(\theta) = \int_1^{\theta} \sqrt{r^2 + (r')^2}\,d\varphi = \int_1^{\theta} \sqrt{2}e^{\varphi}\,d\varphi = \sqrt{2}(e^{\theta} - e) = \sqrt{2}(e^{\sqrt{t}} - e)$ (이하 동일)

#9.

(a) $$\mathbb{K}(t) = \frac{1}{|X'(t)|}\left(\frac{X'(t)}{|X'(t)|}\right)'$$ 5점.

$$= \frac{1}{|X'(t)|} \cdot \frac{1}{|X'(t)|^2} \cdot \left(|X'(t)| \cdot X''(t) - \frac{d}{dt}|X'(t)| \cdot X'(t)\right)$$

$$= \frac{1}{|X'(t)|^3}\left(|X'(t)| \cdot X''(t) - \frac{X'(t) \cdot X''(t)}{|X'(t)|} \cdot X'(t)\right)$$

$$= \frac{1}{|X'(t)|^2} \cdot \left(X''(t) - P_{X'(t)}(X''(t))\right)$$ 15점.

(b) $$P_{X'(0)}(X''(0)) = \frac{X'(0) \cdot X''(0)}{|X'(0)|^2} \cdot X'(0) = \frac{4}{6}(1,2,1)$$

$$\Rightarrow \mathbb{K}(0) = \frac{1}{|X'(0)|^2}\left(X''(0) - P_{X'(0)}(X''(0))\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left((-1,2,1) - \frac{2}{3}(1,2,1)\right) = \frac{1}{18}(-5,2,1)$$ 5점

$$K(0) = \|\mathbb{K}(0)\| = \frac{\sqrt{30}}{18}.$$

∴ 접촉원의 중심 $$C = Q + \frac{\mathbb{K}(0)}{K(0)^2}$$ 10점

$$= (1,0,1) + \frac{18^2}{30} \cdot \frac{1}{18}(-5,2,1)$$

$$= \left(-2, \frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right)$$ 15점.