수학 및 연습 1 기말고사

(2016년 7월 27일 11:00-13:00)

학번:	이름:

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

문제 1. [20점] 원점에서 $(1,1,1)$ 방향으로 발사된 빛이 평면 $x+y-z=3$ 에 위치한 거울에 반사되어 나가는 방향의 단위벡터를 구하시오.

문제 2. [20점] 다음 세 벡터가 일차종속이 되는 실수 t 의 값을 구하시오.

$$(t,2,5), \quad (-1,1,0), \quad (1,3,4)$$

문제 3. [20점] 영이 아닌 벡터 $\mathbf{a}=(a,b,c)$에 대해 사상 $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$을

$$L(\mathbf{x})=\frac{(\mathbf{a}\times\mathbf{x})\times\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}$$

와 같이 정의하자. L이 선형사상임을 보이고 이에 대응하는 행렬을 구하시오.

문제 4. [20점] 다음과 같이 주어진 선형사상 $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$에 대응하는 행렬을 구하시오. 그리고 L의 역사상이 존재함을 보이시오.

$$L\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix},\quad L\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-5\\3\end{pmatrix},\quad L\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\10\\3\end{pmatrix}$$

문제 5. [20점] 다음과 같이 주어진 행렬 A에 대하여 $\det(I-A^{2016})$의 값을 구하시오.

$$A=\begin{pmatrix}2&2&3\\4&6&6\\7&8&10\end{pmatrix}$$

문제 6. [20점] 다음과 같이 주어진 행렬 A에 대하여 행렬 $xI-A$가 가역행렬이 아닌 x의 값들을 모두 구하시오.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&5&3\\1&0&8\end{pmatrix}$$

문제 7. [20점] 다음 물음에 답하시오.

(a) (10점) 곡선 $X(\theta)=(2\sin\theta\cos^2\theta,\ 2\sin^2\theta\cos\theta), 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ 의 개형을 좌표평면에 그리고, 이 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

(b) (10점) 극좌표계로 주어진 곡선

$$r=\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos\frac{\theta}{2},\quad 0\le\theta\le 2\pi$$

의 개형을 좌표평면에 그리고, 곡선의 길이를 구하시오.

문제 8. [20점] 나선 $X(t)=(a\cos t, a\sin t, bt)$ 에 대하여 곡률벡터 $\boldsymbol{\kappa}(t)$ 를 구하시오. (단, a와 b는 0이 아닌 상수이다.)

문제 9. [20점] 곡선의 접촉평면은 매개화에 따라 변화하지 않음을 보이시오.

문제 10. [20점] 이급 정규곡선 $X(t)\in\mathbb{R}^n$ 에 대하여, 다음을 물음에 답하시오.

(a) (10점) $\dfrac{d}{dt}|X'|=\dfrac{X'\cdot X''}{|X'|}$ 이 성립함을 증명하시오.

(b) (10점) ((a)번의 결과를 이용하여) 곡률이 다음 식을 만족함을 증명하시오.

$$\kappa=\frac{\sqrt{|X'|^2|X''|^2-(X'\cdot X'')^2}}{|X'|^3}.$$