2016 학년도 여름학기 수학 및 연습 1 기말고사 모범답안.

1. 문제의 빛은 (t, t, t)로 나타낼 수 있다.

이때, 평면과 만나는 점은 $t + t - t = 3$, $t = 3$

즉, $(3, 3, 3)$ 이다.

평면의 수직벡터를 $\vec{n} = (1, 1, -1)$ 이라 할 때

대칭 공식을 이용하면

$$(3,3,3) - 2\,\frac{(3,3,3)\cdot(1,1,-1)}{(1,1,-1)\cdot(1,1,-1)}\,(1,1,-1)$$

┘ 10점

$$= (1, 1, 5)$$

길이로 나누면 $\frac{1}{3\sqrt{3}}(1, 1, 5)$ 이다.

(*) 공식 대입까지 제대로 했으면 10점

그 후 답까지 맞으면 20점

2. 풀이 1. $a(-1, 1, 0) + b(1, 3, 4) = (t, 2, 5)$ 인 a, b를 찾자.

$(-a+b,\ a+3b,\ 4b) = (t, 2, 5)$ 에서

$a+3b = 2$, $4b = 5$ 이므로,

$a = -\frac{7}{4}$, $b = \frac{5}{4}$.

$\Rightarrow$ $t = -a+b = 3$. //.

풀이 2. $\det \begin{bmatrix} t & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix} = 0$ 인 t를 찾자.

$$\det \begin{bmatrix} t & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix} = 4t - 15 - 5 - (-8)$$

$$= 4t - 12.$$

$\Rightarrow$ $t = 3$. //.

※. 부분 점수 없음.

3. 두 벡터 $\vec{x}$, $\vec{y}$ 와 상수 c 에 대해,

$$L(\vec{x}+c\vec{y}) = \frac{(\vec{a}\times(\vec{x}+c\vec{y}))\times\vec{a}}{|\vec{a}|^2}$$

$$= \frac{((\vec{a}\times\vec{x})+c(\vec{a}\times\vec{y}))\times\vec{a}}{|\vec{a}|^2}$$

$$= \frac{(\vec{a}\times\vec{x})\times\vec{a} + c(\vec{a}\times\vec{y})\times\vec{a}}{|\vec{a}|^2}$$

$$= \frac{(\vec{a}\times\vec{x})\times\vec{a}}{|\vec{a}|^2} + c\cdot\frac{(\vec{a}\times\vec{y})\times\vec{a}}{|\vec{a}|^2}$$

$$= L(\vec{x}) + cL(\vec{y}).$$

⇒ 사상 L 은 선형사상이다. +10

※ 벡터곱은 결합법칙이 성립하지 않음에 유의.

즉, $\vec{a}\times\vec{x}\times\vec{a}$ 와 같이 쓸수 없다.

※ $L(\vec{x}+\vec{y}) = L(\vec{x})+L(\vec{y})$ 와 $L(c\vec{x}) = cL(\vec{x})$ 을 각각 보여도 된다.

$$(\vec{a} \times \vec{x}) \times \vec{a} = \vec{x}\,|\vec{a}|^2 - \vec{a}\,(\vec{x} \cdot \vec{a})$$

$$\Rightarrow \quad L(\vec{x}) = \vec{x} - \frac{(\vec{x} \cdot \vec{a})}{|\vec{a}|^2}\,\vec{a}$$

$$L(\vec{e_1}) = (1, 0, 0) - \frac{a}{a^2+b^2+c^2}(a, b, c)$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2+c^2}(b^2+c^2, -ab, -ac)$$

$$L(\vec{e_2}) = (0, 1, 0) - \frac{b}{a^2+b^2+c^2}(a, b, c)$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2+c^2}(-ab, a^2+c^2, -bc)$$

$$L(\vec{e_3}) = (0, 0, 1) - \frac{c}{a^2+b^2+c^2}(a, b, c)$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2+c^2}(-ac, -bc, a^2+b^2)$$

L 에 대응되는 행렬은 $[\,L(e_1) \quad L(e_2) \quad L(e_3)\,]$ 이므로,

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}\begin{bmatrix} b^2+c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2+c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2+b^2 \end{bmatrix}$$

+10

#4.

$$L\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} = L\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) = L\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+L\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+L\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-5\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\10\\3\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad L\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

$$L\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = L\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - L\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-5\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\7\\0\end{pmatrix} \lrcorner 5$$

$$L\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = L\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - L\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\3\\3\end{pmatrix} \lrcorner 5$$

$$L\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = L\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - L\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\10\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-8\\0\end{pmatrix} \lrcorner 5$$

∴ L에 대응하는 행렬 $= \begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\7 & 3 & -8\\0 & 3 & 0\end{pmatrix}$

$$\det\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\7 & 3 & -8\\0 & 3 & 0\end{pmatrix} = (-7)\begin{vmatrix}-1 & 2\\3 & 0\end{vmatrix} = (-7)(-6) = 42 \neq 0 \lrcorner 5$$

∴ L의 역사상 존재.

※ $L = \begin{pmatrix}0 & 7 & 0\\-1 & 3 & 3\\2 & -8 & 0\end{pmatrix}$ 로 한경우, -5점

#5

$$\det(I - A^{2016}) = \det\left((I - A)(I + A + \cdots + A^{2015})\right)$$
$$= \det(I - A) \cdot \det(I + A + \cdots + A^{2015})$$ 10점

그런데

$$\det(I - A) = \det\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 \\ -7 & -8 & -9 \end{pmatrix} = 0$$

(세 열벡터가 일차종속 : [1열] - 2x [2열] + [3열] = 0)

이므로, $\det(I - A^{2016}) = 0$ 이다. 10점

#6 $\det(xI-A)=0$ 인 x를 찾자.

$$xI-A=\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x-1 & -2 & 2 \\ -2 & x-5 & -3 \\ -1 & 0 & x-8 \end{pmatrix}$$

$$\det(xI-A)=(-1)\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ x-5 & -3 \end{vmatrix}+(x-8)\begin{vmatrix} x-1 & -2 \\ -2 & x-5 \end{vmatrix}$$ ┘5

$$=-\left(6-2(x-5)\right)+(x-8)\left((x-1)(x-5)-4\right)$$

$$=2(x-8)+(x-8)(x^2-6x+1)$$

$$=(x-8)(x^2-6x+3)=x^3-14x^2+51x-24$$ ┘10

$(x-8)(x^2-6x+3)=0$ 인 x는

$x=8$ or $3\pm\sqrt{6}$ ┘5

#7.

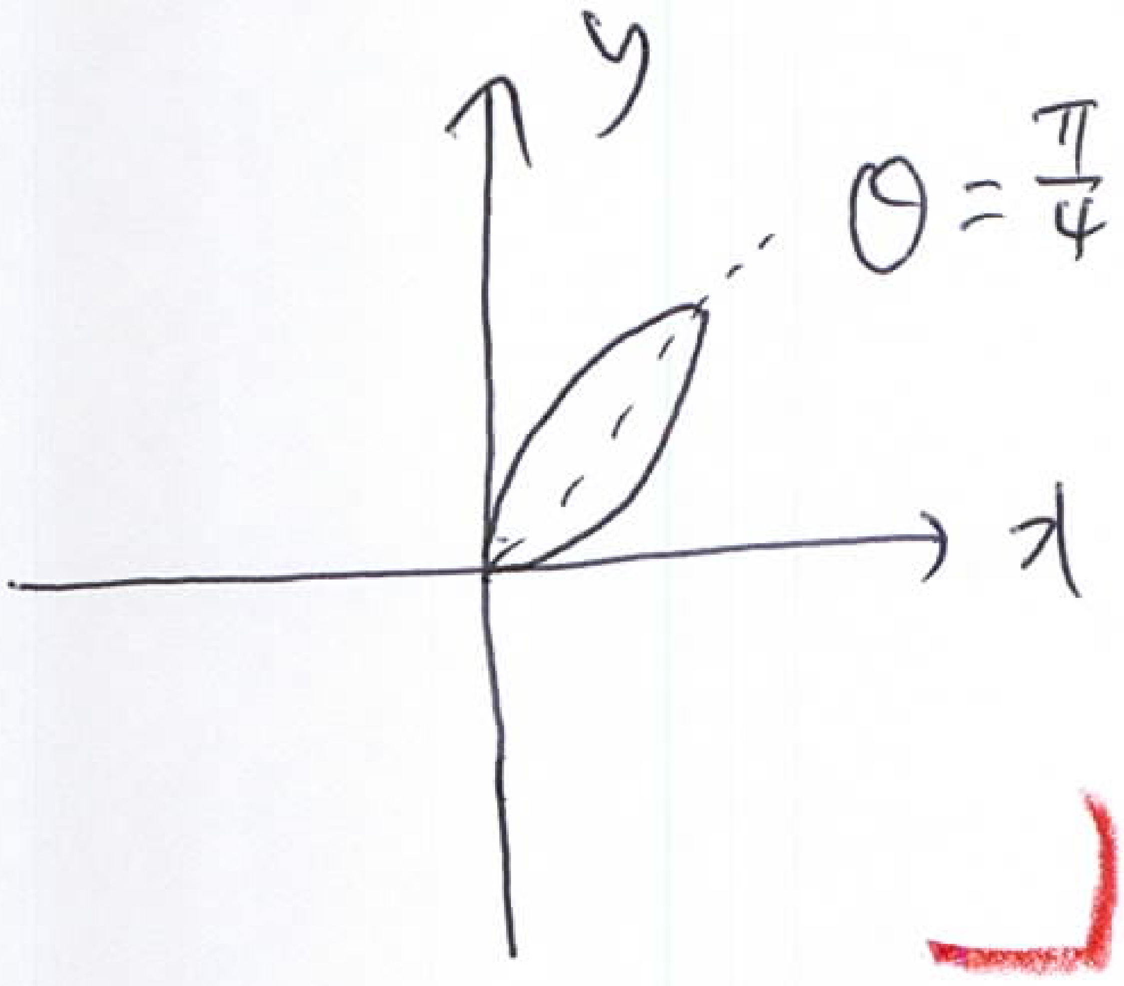
(a) 개형을 그리기 위해 극좌표계로 나타내보자.

$$X(\theta) = (2\sin\theta\cos^2\theta,\ 2\sin^2\theta\cos\theta)$$

$$= 2\sin\theta\cos\theta(\cos\theta,\ \sin\theta)$$

$$= \sin 2\theta(\cos\theta,\ \sin\theta) \quad \left(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow r(\theta) = \sin 2\theta \quad \left(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right)$$



$\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow$ 넓이 $S = 2 \times \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 2\theta \, d\theta$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos 4\theta}{2} \, d\theta$$

5점

$$= \frac{1}{2}\left[\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

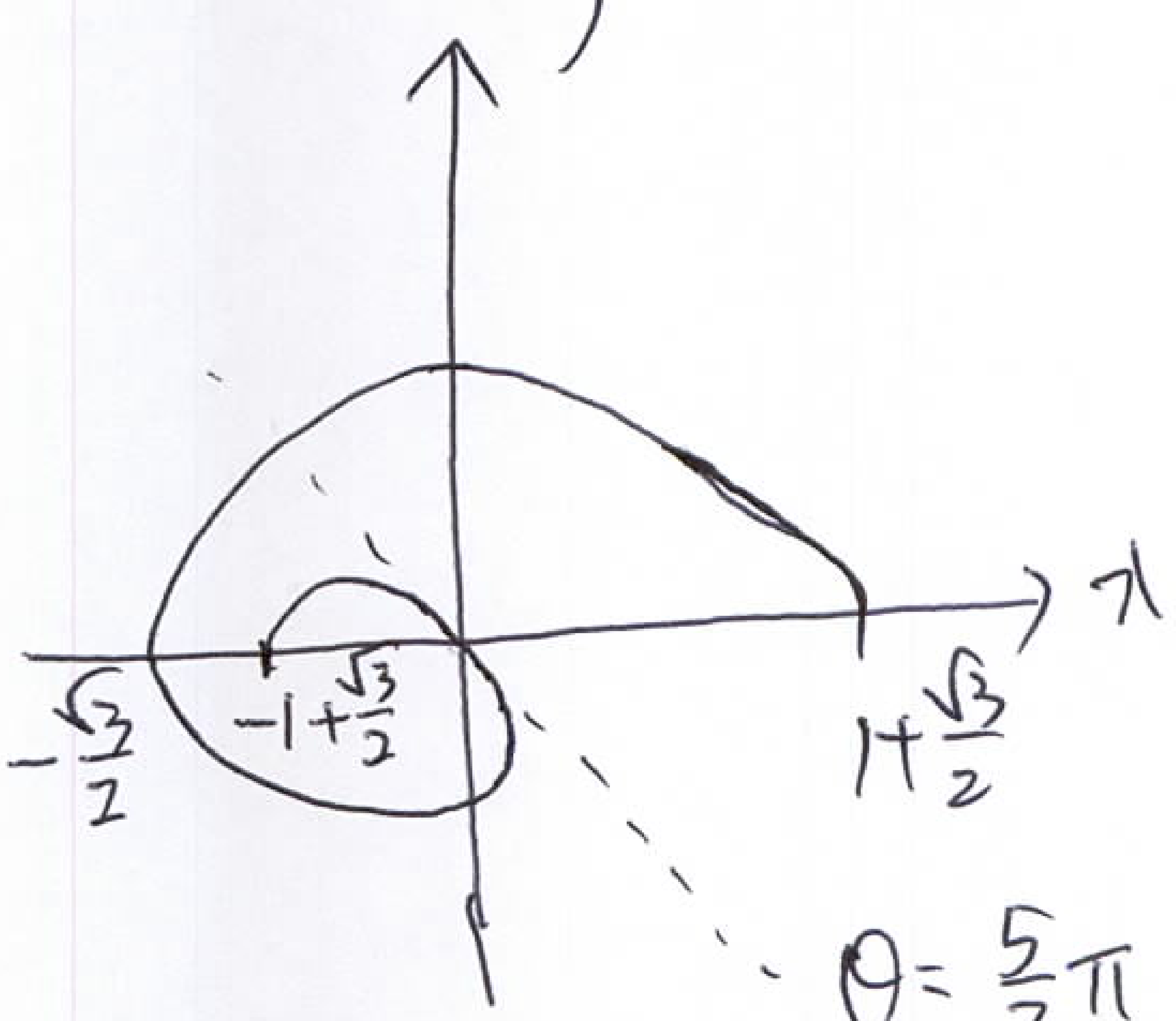
$$= \frac{\pi}{8}$$

5점

* 그래프 개형에서 $0 \le \theta \le 2\pi$ 다 그린경우 점수 인정.

#17

(b) $r(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos\frac{\theta}{2} \quad (0 \le \theta \le 2\pi)$



↳0.5점

곡선의 길이 $l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(r')^2 + r^2}\, d\theta$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1}{4}\sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2} + \sqrt{3}\cos\frac{\theta}{2} + \frac{3}{4}}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sqrt{3}\cos\frac{\theta}{2} + \frac{3}{4}\cos^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

$$= \left[\theta + \sqrt{3}\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 2\pi$$

↳0.5점

* 정해진 기준외 부분점수 없음.

8.

$$X'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$$

$$|X'(t)| = \sqrt{a^2+b^2}$$

따라서

$$\kappa(t) = \frac{1}{|X'(t)|}\left(\frac{X'(t)}{|X'(t)|}\right)'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\sin t, a\cos t, b)\right)'$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2}(-a\cos t, -a\sin t, 0)$$

(*) 곡률 상수만 구한경우는 5점

(*) 다른 부분점수는 없습니다.

#9.

곡선 $X(t)$의 $t=t_0$에서 접촉평면은

- $X(t_0)$를 지나고, - $X'(t_0)$와 $X''(t_0)$로 이루어지는 평면

이다. $t=g(s)$가 이급가역함수일 때, $Y(s)=(X\circ g)(s)$라 하자.

$t_0=g(s_0)$일 때, $Y(s)$의 $s=s_0$에서 접촉평면은

- $Y(s_0)=X(t_0)$를 지나고,
- $Y'(s_0)=X'(g(s_0))\cdot g'(s_0) = X'(t_0)\cdot g'(s_0)$ ⌋5점 와

$Y''(s_0) = X''(g(s_0))\cdot g'(s_0)^2 + X'(g(s_0))\cdot g''(s_0)$

$= X''(t_0)\cdot g'(s_0)^2 + X'(t_0)\cdot g''(s_0)$ ⌋5점

로 이루어지는 평면

이다. 그러면 $a,b\in\mathbb{R}$일 때

$aY'(s_0)+bY''(s_0)$

$=(ag'(s_0)+bg''(s_0))\cdot X'(t_0) + (bg'(s_0)^2)X''(t_0)$

이므로, Y의 접촉평면이 X의 접촉평면에 포함된다. 거꾸로 X는 Y를 $s=g^{-1}(t)$로 재매개화하여 얻을 수 있으므로, 같은 원리로 X의 접촉평면이 Y의 접촉평면에 포함된다.

* 벡터곱을 사용해 설명한 경우 -7점

* 일부의 재매개화만 다룬 경우 -10점

10

(a) $|X'(t)|^2 = X'(t) \cdot X'(t)$ 로 부터 t로 미분하면

$$2|X'(t)| \cdot \frac{d}{dt}|X'(t)| = 2X'(t) \circ X''(t)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}|X'(t)| = \frac{X'(t) \circ X''(t)}{|X'(t)|}$$

---

* 부분점수 없이 맞으면 10점, 틀리면 0점.

* $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))$ 로 놓고 풀었을 때,

맞으면 10점, 틀리면 0점.

만약 임의의 n차원으로 $X(t)$를 설정하지 않고 풀었으면

2점 감점. (예) $n=3$ 혹은 $n=2$)

#10.

(b) $$k = \frac{1}{|X'|}\left|\left(\frac{X}{|X'|}\right)'\right|$$

$$= \frac{1}{|X'|}\left|\frac{|X'|X'' - \frac{d}{dt}|X'|X'}{|X'|^2}\right|$$

$(\because (a))$

$$= \frac{1}{|X'|^3}\left||X'|X'' - \frac{X'\circ X''}{|X'|}X'\right|$$

$\boxed{5점}$

$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\circ\vec{a}}$ 으로부터,

$$\left||X'|X'' - \frac{X'\circ X''}{|X'|}X'\right| = \sqrt{\left(|X'|X'' - \frac{X'\circ X''}{|X'|}X'\right)\circ\left(|X'|X'' - \frac{X'\circ X''}{|X'|}X'\right)}$$

$$= \sqrt{|X'|^2|X''|^2 - 2(X'\circ X'')^2 + \frac{(X'\circ X'')^2}{|X'|^2}|X'|^2}$$

$$= \sqrt{|X'|^2|X''|^2 - (X'\circ X'')^2}$$ 을 알 수 있다.

따라서,

$$k = \frac{1}{|X'|^3}\sqrt{|X'|^2|X''|^2 - (X'\circ X'')^2}$$

$\boxed{10점}$

$$\ast \quad \left| |X'|X'' - \frac{X' \circ X''}{|X'|} X' \right|$$

$$= \frac{1}{|X'|} \left| |X'|^2 X'' - (X' \circ X'') X' \right|$$

$$= \frac{1}{|X'|} \left| (X' \times X'') \times X' \right|$$

을 쓴 경우 **5점 감점** ($\because X$는 $\mathbb{R}^n$에서의 곡선)