

수학 및 연습 1 기말고사
(2016년 6월 4일 오후 1:00-3:00)

학번:	이름:
-----	-----

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

문제 1. [20점] 두 평면 $x + y + z = 4$, $2x + y + 3z = 6$ 의 교선과 x 축 사이의 최단거리를 구하시오.

문제 2. [20점] 삼차원 좌표공간의 벡터 $\mathbf{u} = (1, 1, 0)$ 와 $\mathbf{v} = (1, 2, 1)$ 를 포함하며 원점을 지나는 평면을 H 라 할 때 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점) 벡터 \mathbf{x} 에 대하여 \mathbf{x} 와 가장 가까운 H 위의 벡터를 $P(\mathbf{x})$ 라고 할 때, $P(\mathbf{x})$ 를 구하시오.
- (b) (5점) 사상 $P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 가 선형사상임을 보이시오.
- (c) (5점) 선형사상 P 에 대응하는 행렬을 구하시오.

문제 3. [20점] 행렬

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a_2 \end{pmatrix}$$

의 역행렬을 구하시오. (단, $a_1 a_2 \neq 0$ 이다.)

문제 4. [20점] 직선 $x = y - a = z + b$ 에 대한 대칭이 선형사상이 되기 위한 a, b 의 값을 구하고, 이 경우 선형사상에 대응되는 행렬 및 행렬식을 구하시오.

문제 5. [20점] 선형사상 $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 이

$$L \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad L \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad L \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 13 \\ 3 \end{pmatrix}$$

을 만족한다고 하자.

- (a) (10점) 선형사상 L 에 대응되는 행렬을 구하시오.
- (b) (10점) 삼차원 좌표공간의 세 벡터 $\mathbf{u} = (1, -1, 0)$, $\mathbf{v} = (2, 3, -1)$, $\mathbf{w} = (-1, 0, 2)$ 에 대하여

$$S = \{x\mathbf{u} + y\mathbf{v} + z\mathbf{w} : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 3\}$$

일 때, $L(S)$ 의 부피를 구하시오.

문제 6. [20점] 삼차원 좌표공간의 세 벡터 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 에 대하여

$$F(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}) \cdot ((2\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}) \times (-\mathbf{a} + \mathbf{c}))$$

로 정의하자. $F(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 6\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ 임을 보이시오.

문제 7. [20점] 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점) 좌표평면 위에서 극좌표로 주어진 다음 곡선이 둘러싸는 영역의 넓이를 구하시오.

$$r = 2 \cos \theta - \sec \theta, \quad -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

- (b) (10점) 좌표평면 위에서 극좌표로 주어진 두 곡선 $X_1 : r = 1 - \cos \theta$ 와 $X_2 : r = 1 + \cos \theta$ 가 있다. 곡선 X_1 과 X_2 로 각각 둘러싸인 영역의 공통된 부분의 둘레의 길이를 구하시오.

문제 8. [20점] 좌표평면에서 점 P 의 운동이 $(\cos 2t, \sin 2t)$ 로 주어지고, 점 Q 의 운동이 $2(\cos t, \sin t)$ 로 주어졌다고 하자. 점 P 에서 점 Q 를 바라보았을 때 점 Q 의 운동을 곡선 $X(t)$ 라 하자.

- (a) (10점) $X(t)$ 를 구하시오.
- (b) (10점) $t = \frac{\pi}{2}$ 일 때 접선의 방정식을 구하시오.

문제 9. [20점] 곡선 $X(t) = (2t, \cosh 2t, \sinh 2t)$ 를 호의 길이로 매개화 하시오.

문제 10. [20점] 곡선 $y = -\log(\cos x)$, $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ 의 곡률이 최대인 점에서 곡률벡터와 접촉원의 방정식을 구하시오.