2016년 1학기 수학 및 연습 1 기말고사 모범답안

1. $(1,1,1)\times(2,1,3)=(-2,1,1)$ 에서 교선은 $(-2t+2,\ t+2,\ t)$

$(t\in\mathbb{R})$로 매개화된다.

$(-2,1,1)\times(1,0,0)=(0,1,-1)$ 이므로

$$\text{최단거리} = \left|\left((2,2,0)-(0,0,0)\right)\cdot\frac{(0,1,-1)}{|(0,1,-1)|}\right| \quad (\text{정사영 이용})$$

$$=\left|(2,2,0)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)\right| = \sqrt{2}.$$

* 교선의 방정식이나 방향벡터를 구한 경우 : 5점

거리에 대한 식을 유도한 경우 (정사영, 내적, 외적, 단순계산 등) : 10점

나머지 계산 : 5점

(cf) 답이 맞아도 과정이 틀리면 답에 대한 점수도 없습니다.

문제 2. [20점] 삼차원 좌표공간의 벡터 $u = (1,1,0)$ 와 $v = (1,2,1)$ 를 포함하며 원점을 지나는 평면을 H라 할 때 다음 물음에 답하시오.

(a) (10점) 벡터 x에 대하여 x와 가장 가까운 H 위의 벡터를 $P(x)$라고 할 때, $P(x)$를 구하시오.

(b) (5점) 사상 $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 가 선형사상임을 보이시오.

(c) (5점) 선형사상 P에 대응하는 행렬을 구하시오.

풀이) (a) 풀이 1) $n := u \times v = (1,-1,1)$ 이므로 평면 H는 $x-y+z=0$ 으로 주어진다. 」5점

임의의 벡터 $x = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ 에 대하여 $P(x) = x - P_n(x)$ 이고, $P_n(x) = \frac{n \cdot x}{n \cdot n} n = \frac{(1,-1,1)\cdot(x,y,z)}{(1,-1,1)\cdot(1,-1,1)}(1,-1,1) = \frac{x-y+z}{3}(1,-1,1)$ 이므로

$$P(x) = x - \frac{n \cdot x}{n \cdot n} n = (x,y,z) - \frac{x-y+z}{3}(1,-1,1) = \left(\frac{2x+y-z}{3}, \frac{x+2y+z}{3}, \frac{-x+y+2z}{3}\right)$$ 이다. 」10점

풀이 2) $P(x)$는 H 위의 벡터이므로 $P(x) = au + bv$ 로 표현할 수 있다.

$\Rightarrow x - P(x) \perp u$, $x - P(x) \perp v$ 이므로 」5점

$$\begin{cases} (x-P(x)) \cdot u = (x - au - bv) \cdot u = x \cdot u - 2a - 3b = 0 & \cdots ① \\ (x-P(x)) \cdot v = (x - au - bv) \cdot v = x \cdot v - 3a - 6b = 0 & \cdots ② \end{cases}$$

①과 ②로부터 $a = (2u - v) \cdot x$, $b = (-u + \frac{2}{3}v) \cdot x$ 임을 알 수있다. 」10점.

(b) 임의의 벡터 $x, y \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}$ 에 대해

$$P(x+y) = (x+y) - \frac{n \cdot (x+y)}{n \cdot n} n = \left(x - \frac{n \cdot x}{n \cdot n} n\right) + \left(y - \frac{n \cdot y}{n \cdot n} n\right) = P(x) + P(y)$$ 이고,

$$P(tx) = (tx) - \frac{n \cdot (tx)}{n \cdot n} n = t\left(x - \frac{n \cdot x}{n \cdot n} n\right) = tP(x)$$ 임을 알 수 있다.

따라서, 사상 $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 가 선형사상이다.

(c) $P(x) = \left(\frac{2x+y-z}{3}, \frac{x+2y+z}{3}, \frac{-x+y+2z}{3}\right)$ 으로부터

선형사상 P에 대응되는 행렬 $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ 임을 알 수있다.

※ 채점기준

(a) 1)에서 법선벡터, 2)에서 u, v에 수직임을 보이면 5점

그 후 $P(x)$를 정확하게 계산하면 5점

(b) $P(x+y) = P(x) + P(y)$, $P(tx) = tP(x)$ 를 통해보이거나, (a)에서 행렬을 구하여 선형사상임을 보인 경우 5점

(c) 선형사상 P에 대응되는 행렬을 정확하게 구하면 5점

그 외 부분점수없음.

#3

$$B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, \quad AB = I_3 \text{ 라 하자}$$

$\Rightarrow \quad a_1 a = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{a_1}$ & $b = c = 0$

$a + d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 0$

$a + d + a_2 g = 0 \quad \Rightarrow \quad g = 0$

$b + e = 1 \quad \Rightarrow \quad e = 1$ & $f = 0$

$b + e + a_2 h = 0 \quad \Rightarrow \quad h = -\frac{1}{a_2}$

$c + f + a_2 i = 0 \quad \Rightarrow \quad i = \frac{1}{a_2}$

$$\therefore \; B = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{a_1} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_2} \end{pmatrix}$$

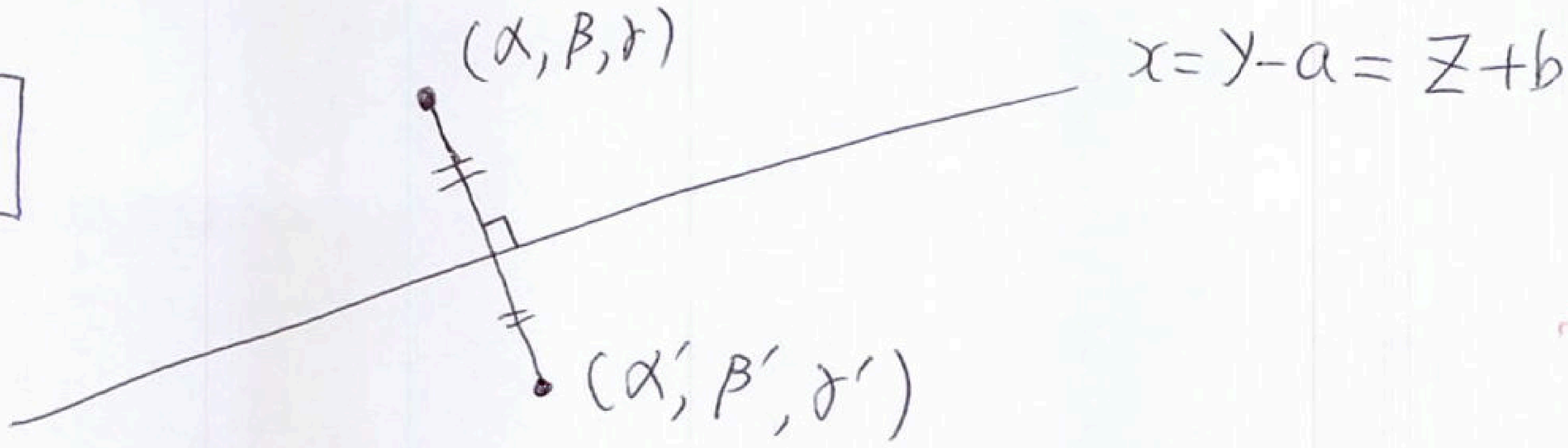
이고 $B \cdot A = I_3$ 이므로

$A^{-1} = B$ 가 된다

* 하나의 성분이 틀릴 때마다 −5점

(5개 이상 틀릴시 0점)

$\boxed{4}$



임의의 점 (α, β, γ)를 직선 $x = y - a = z + b$에 대칭 시킨 점을 $(\alpha', \beta', \gamma')$라고 할 때,

두 점의 중점이 직선 $x = y - a = z + b$ 위에 존재하고 $\cdots$ ①
두 점을 지나는 직선이 $x = y - a = z + b$와 수직하다. $\cdots$ ②

①로부터, $\dfrac{\alpha + \alpha'}{2} = \dfrac{\beta + \beta'}{2} - a = \dfrac{\gamma + \gamma'}{2} + b$ 를 얻고 $\cdots$ ③

$(\alpha' - \alpha) \cdot 1 + (\beta' - \beta) \cdot 1 + (\gamma' - \gamma) \cdot 1 = 0$ 을 얻는다 $\cdots$ ④.

③과 ④를 연립하면

$$\alpha' = -\tfrac{1}{3}\alpha + \tfrac{2}{3}\beta + \tfrac{2}{3}\gamma + \frac{-a+b}{3}$$
$$\beta' = \tfrac{2}{3}\alpha - \tfrac{1}{3}\beta + \tfrac{2}{3}\gamma + \frac{2a-b}{3}$$
$$\gamma' = \tfrac{2}{3}\alpha + \tfrac{2}{3}\beta - \tfrac{1}{3}\gamma + \frac{-a-2b}{3}$$ 이다.

이 대칭이 선형사상이 되기 위해서는 α', β', γ'이 모두 α, β, γ의 일차식이 되어야 하므로, $0 = \dfrac{-a+b}{3} = \dfrac{2a-b}{3} = \dfrac{-a-2b}{3}$

$\iff a = b = 0$ 이 되어야 한다.

그러면 $\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ 가 되어서 이 선형사상에 대응되는

행렬은 $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ 이 되고

이 행렬의 행렬식은 1이다.

※ 배점

① $a=b=0$ 임을 보이면 3점

② $a=b=0$ 일 때, 선형사상임을 보이면 7점

③ 대응되는 행렬과 그 행렬식을 각각 구하면 각 5점씩

※ 행렬이 틀렸는데 행렬식만 맞는 경우는 배점 ③에서 0점

※ 선형 사상의 성질 (원점 → 원점)을 이용하여 $a=b=0$ 을 구하고 선형 사상임을 보이지 않으면 $\begin{cases} \text{배점 ②에서 0점} \\ \text{배점 ①에서 3점} \end{cases}$

#5.

(a) $L\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$, $L\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=L\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-L\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}$, $L\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\left(L\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}-L\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$

$$=\begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix}$$

$\therefore$ L에 대응하는 행렬은 $\begin{pmatrix}0&2&1\\-1&4&5\\1&0&1\end{pmatrix}$ ┘10점

(b) (S의 부피) $=|\det(2u, v, 3w)|$

$=\left|\det\begin{pmatrix}2&2&-3\\-2&3&0\\0&-1&6\end{pmatrix}\right|=54$ ┘5점

따라서, ($L(S)$의 부피) $=|\det L|$(S의 부피) $=8\cdot 54=432$ ┘5점

(a) 답이 틀리면 무조건 0점

(b) S의 부피를 맞게 구하면 5점

(단, '부피가 54' 또는 '$L(S)$의 부피가 54'와 같이 모호한 표현을 사용한 경우 점수없음!)

6.

$$F(a,b,c) = (a-2b+3c)\cdot\left((2a+b-c)\times(-a+c)\right)$$

$$= \det\left(a-2b+3c,\ 2a+b-c,\ -a+c\right)$$

10점

$$= \det\left(4a-2b,\ a+b,\ c\right)$$

$$= \det\left(6a,\ a+b,\ c\right)$$

$$= \det\left(6a,\ b,\ c\right) = 6\cdot\det(a,\ b,\ c)$$

10점

(별해)(*) $a=(a_1,a_2,a_3)$, $b=(b_1,b_2,b_3)$, $c=(c_1,c_2,c_3)$ 라 두고

계산한 경우 눈으로 사칙연산 가능한 수준 까지 계산하여야 인정.

$$(*)\ \det\left(\underbrace{a-2b+3c,\ 2a+b-c,\ -a+c}_{①}\right)$$

$$= \det\left(\underbrace{\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{②}\right)$$

로 계산한 경우 ① 과 ② 의 행렬표현이

다른경우 별도의 설명이 없으면 인정 X

(*) $(a-2b+3c)\cdot((2a+b-c)\times(-a+c))$

$= (a-2b+3c)(-b\times a + c\times a + 2a\times c + b\times c)$

$= (a-2b+3c)(a\times b + a\times c + b\times c)$

$= 3c\cdot(a\times b) - 2b\cdot(a\times c) + 3c\cdot(a\times b)$ 10점

$= 3\det(c,a,b) - 2\det(b,a,c) + 3(c,a,b)$.

$= 6\det(a,b,c)$ 10점

#7. (a)

$$S = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (2\cos\theta - \sec\theta)^2 \, d\theta$$ ⌋ 5점

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (4\cos^2\theta - 4 + \sec^2\theta) \, d\theta$$

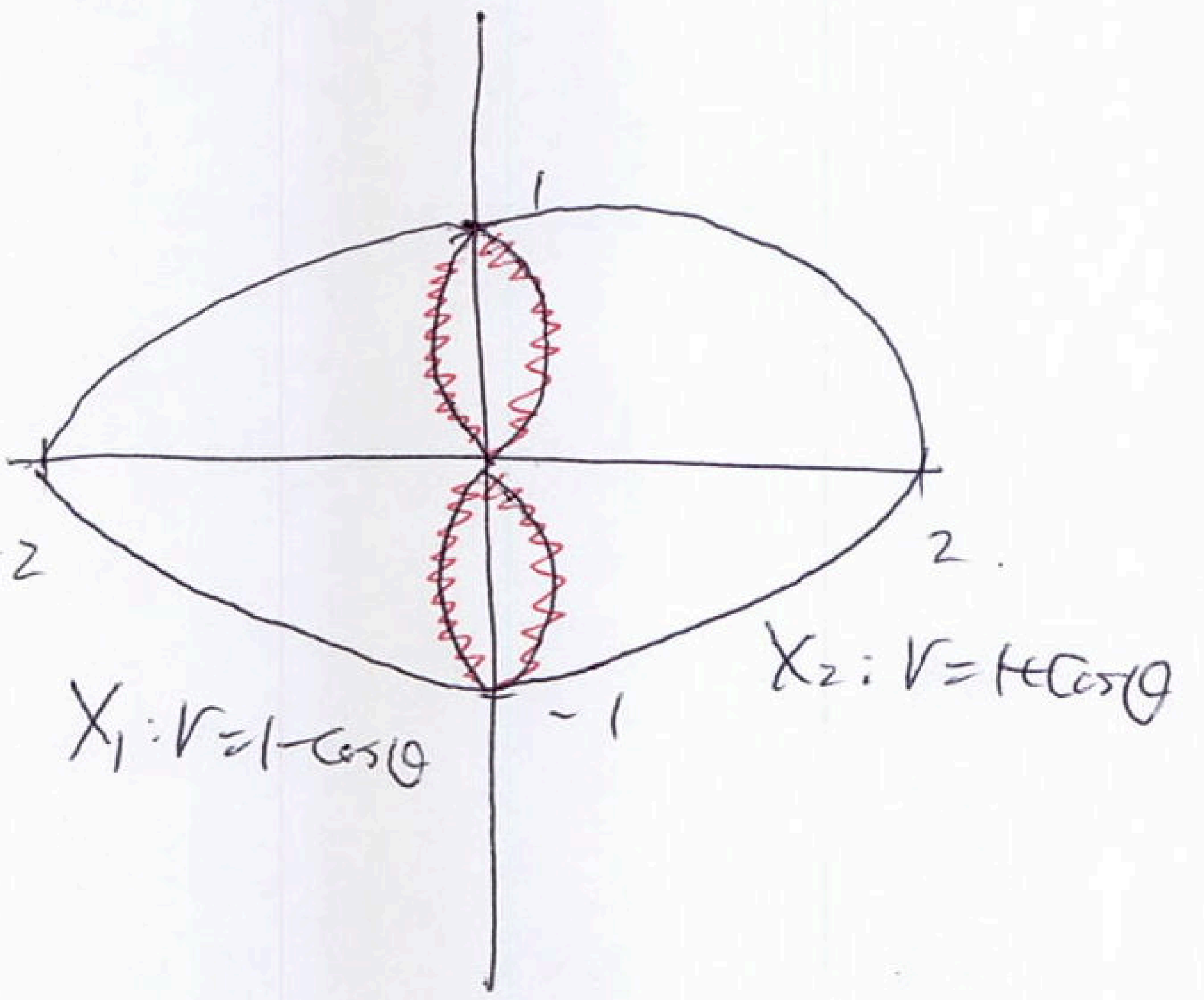
$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (2\cos 2\theta - 2 + \sec^2\theta) \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\sin 2\theta - 2\theta + \tan\theta\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= 2 - \frac{\pi}{2}$$ ⌋ 10점

* 다른 방법으로 접근한 경우, 답까지 맞아야 10점. (부분점수 없음)

문제 7-(b)



공통된 부분의 둘레의 길이

$= 8$

$=) \times 4$

$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\theta$

$(r = 1-\cos\theta)$ +5

$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}\sqrt{1-\cos\theta}\, d\theta$

$= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\frac{\theta}{2}\, d\theta$

$= 8\left[-2\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= 16\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= 16 - 8\sqrt{2}.$ +5

※ 공통된 부분을 정확히 구하고 (혹은 표시하고) 맞는 식을 세웠을 때만 +5. (그 외 적분구간, 식 틀린 시는 모두 0점)
대칭성을 이용해서 $)\times 4$를 구해야하는데 $)\times 2$ or $)\times 8$ 등 정답과 상수배 정도 차이가 있을 시 +5

#8. (a) $X(t) = Q(t) - P(t) = (2\cos t - \cos 2t,\ 2\sin t - \sin 2t)$

제대로 구했으면 10점. 틀렸으면 0점.

(b) $X'(t) = (-2\sin t + 2\sin 2t,\ 2\cos t - 2\cos 2t)$ 3점

$X(\frac{\pi}{2}) = (1, 2)$ 2점

$X'(\frac{\pi}{2}) = (-2, 2)$ 2점

접선의 방정식

$l(s) = X(\frac{\pi}{2}) + sX'(\frac{\pi}{2}) = (1,2) + s(-2,2)$

$= (-2s+1,\ 2s+2)$

혹은 $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{2}$

혹은 $x + y = 3$ 3점

#9.

$$X(t) = (2t,\ \cosh 2t,\ \sinh 2t)$$

$$X'(t) = (2,\ 2\sinh 2t,\ 2\cosh 2t)$$

$$|X'(t)| = 2\sqrt{2 + 2\sinh^2 t} \quad (\because \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1)$$

$$\begin{aligned} S = \int_0^t |X'(u)|\, du &= 2\sqrt{2}\int_0^t \sqrt{1+\sinh^2 2u}\, du \\ &= 2\sqrt{2}\int_0^t \cosh 2u\, du \\ &= 2\sqrt{2}\cdot\left[\frac{1}{2}\sinh 2u\right]_0^t \\ &= \sqrt{2}\sinh 2t \end{aligned}$$

$$2t = \sinh^{-1}\frac{S}{\sqrt{2}} = \log\left(\frac{S}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{S^2}{2}+1}\right), \quad \therefore t = \frac{1}{2}\log\left(\frac{S}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{S^2}{2}+1}\right)$$

$$\therefore \tilde{X}(S) = X(t(S)) = \left(\log\left(\frac{S}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{S^2}{2}+1}\right),\ \sqrt{1+\frac{S^2}{2}},\ \frac{S}{\sqrt{2}}\right).$$

* 채점기준

1. $S = \sqrt{2}\sinh 2t$ ··· +10점
2. 역함수 언급 ··· +5점.
3. 올바른 답 ··· +5점.
4. 계산 실수 ··· −5점.
5. S를 잘못구했을 경우, 전체적인 흐름이 맞으면 +5점. 그 외 0점.
6. 위와 다른 방법으로 푼 경우, 풀이의 흐름이 올바르고 계산 실수가 없는 경우 정답 인정.

* 정답을 적을 때는 가급적 계산을 다하여 적기를 권장함.

문제10.

곡선 $y = -\log(\cos x)$를 $t = x$로 매개화 하면

$X(t) = (t, -\log(\cos t))$ $\left(-\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}\right)$ 을 얻는다.

$\Rightarrow X'(t) = \left(1, \frac{\sin t}{\cos t}\right) = \frac{1}{\cos t}(\cos t, \sin t)$

$|X'(t)| = \frac{1}{\cos t}$

곡률벡터 $\mathbb{K}(t) = \frac{1}{|X'(t)|} \cdot \left(\frac{X'(t)}{|X'(t)|}\right)'$

$= \cos t\,(\cos t, \sin t)'$

$= \cos t\,(-\sin t, \cos t)$ 10

$\therefore$ 곡률 $\kappa(t) = |\mathbb{K}(t)| = \cos t$ 는 $-\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}$ 에서 $t=0$ 일때

최대값 $\kappa(0) = 1$ 을 갖는다.

5

곡률벡터 $\mathbb{K}(0) = (0, 1)$

곡률반경 $r = \frac{1}{\kappa(0)} = 1$

지나는 점 $X(0) = (0, 0)$

$\rightarrow$ 접촉원의 방정식 $x^2 + (y-1)^2 = 1$

5

- 매개화를 다르게 하여도 계산이 맞으면 정답.
- 곡률만 구한 경우 총 5점.
  이 때 3차원으로 확장하지 않고 $\kappa = \frac{|X' \times X''|}{|X'|^3}$ 공식을 이용하면 점수 없음
- 앞의 계산이 틀리면 뒤의 식이 우연히 맞아도 점수 없음.