

수학 및 연습 1 (001-005) 기말고사

2003년 6월 14일 오후 1시 – 3시

학번: _____ 이름: _____

모든 문제의 답과 풀이과정을 명시하시오(총점 200점).

1. (20점) 극좌표계로 주어진 심장형 곡선 $r = 1 + \cos \theta$ 와 직교좌표계로 주어진 직선 $y = x$ 의 모든 교점을 직교좌표로 나타내시오.
2. (20점) 극좌표계에서 $r = 2 - \cos \theta$ 로 주어진 곡선의 개형을 xy -평면 위에 그리고, 곡선의 x -절편, y -절편을 표시하시오.
3. (20점) 3차원 공간의 점 A, B 를 구면좌표계 (ρ, φ, θ) 로 나타내면

$$A = \left(2, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right), \quad B = (1, \pi, 0)$$

가 된다. 이때 선분 AB 의 길이를 구하시오.

4. (30점) 선형사상 $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 이 다음 성질을 만족한다.

$$\begin{aligned} L(1, 2, 3) &= (0, 2, 2), \\ L(0, 1, 2) &= (-1, 1, 1), \\ L(0, 0, 1) &= (0, 1, 0). \end{aligned}$$

- (a) L 을 나타내는 행렬 A 를 구하시오.
- (b) 세 벡터 $L(1, 0, 0), L(0, 1, 0), L(0, 0, 1)$ 이 일차독립인지 일차종속인지 판정하시오.

5. (30점)

- (a) 3차원 공간에서 아래의 그림과 같이 z 축을 회전축으로 하여 시계 반대 방향으로 θ 만큼 회전하는 선형사상에 대응되는 행렬 A 를 구하시오.



- (b) (a)에서 구한 행렬 A 와 다음과 같이 주어진 행렬

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

의 곱 AB 의 행렬식을 구하시오.

6. (30점) 3차원 공간의 벡터 $\mathbf{v} = (1, 0, -1)$ 에 대한 벡터 X 의 정사영을 $P_{\mathbf{v}}(X)$ 로 나타낼 때,
- (a) $P_{\mathbf{v}}$ 가 선형사상임을 보이시오.
 - (b) $P_{\mathbf{v}}$ 를 나타내는 행렬 M 을 구하시오.
 - (c) 점 $(1, 1, 2)$ 를 평면 $x - z = 0$ 위로 정사영한 점을 구하시오.
7. (30점)
- (a) 평면 $x + y + z = 4$ 와 $2x + y + 3z = 6$ 의 교선의 방정식을 구하시오.
 - (b) 위에서 구한 교선과 x 축 사이의 최단거리를 구하시오.
8. (20점) 3차원 공간에서 $\triangle ABC$ 와 원점 O 에 대하여 $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$ 로 두면 벡터 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{c} \times \mathbf{a})$ 는 $\triangle ABC$ 에 수직임을 보이시오.