

계절학기 수학 및 연습 1 기말고사

2006년 7월 26일

학번 :

이름 :

1. (20점) 삼차원 공간에서 사상 $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$L(a, b, c) = (3c, 2b, -a)$$

(a) L 이 선형사상임을 보이시오. (10점)

(b) L 의 역사상을 구하시오. (10점)

2. (30점) 주어진 점 $X \in \mathbb{R}^3$ 를 평면 $x + z = 0$ 에 내린 수선의 발을 $T(X)$ 로 정의하자.

(a) 위의 선형사상 T 에 대응되는 행렬 B 를 구하시오. (15점)

(b) $B^{2006} + I$ 의 행렬식을 구하시오. (15점)

3. (20점) 삼차원 공간에 세 점 $A = (-1, 1, 1)$, $B = (1, 3, -1)$, $C = (3, -3, 1)$ 이 놓여 있다.

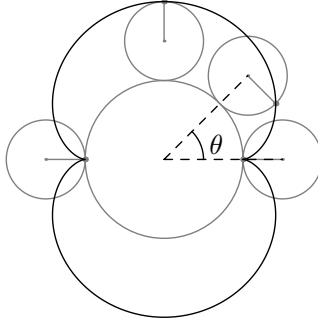
(a) 삼각형 ABC 의 면적을 구하시오. (10점)

(b) 삼각형 ABC 에 수직이고, 점 $(1, 2, -4)$ 를 지나는 직선의 방정식을 구하시오. (10점)

4. (20점) $\mathbf{a} = (1, 2, 0)$, $\mathbf{b} = (0, 1, 1)$ 일 때, 다음과 같이 정의된 두 선형사상 f 와 g 에 대응되는 행렬 M_f 와 M_g 를 각각 구하시오.

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{x}), \quad g(\mathbf{x}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{x} \quad (\text{단, } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3)$$

5. (30점) 반지름 2인 원 바깥에 반지름 1인 원이 접한 채로 돌고 있다. 작은 원 위의 한 점이 그리는 자취를 nephroid라 부른다.



(a) nephroid의 매개변수 방정식이 다음과 같이 표현됨을 보이시오. (15점)

$$x(\theta) = 3 \cos \theta - \cos 3\theta,$$

$$y(\theta) = 3 \sin \theta - \sin 3\theta$$

(b) nephroid의 둘레의 길이를 구하시오. (15점)

6. (20점) 다음 두 영역의 공통 영역을 도식하고 그 영역의 넓이를 구하시오.

$$r \leq 1 - \cos \theta, \quad r \leq 1 + \cos \theta$$

7. (20점) $-\pi < \theta_0 < 0$ 일 때 다음 곡선

$$C: \quad x^2 + y^2 = 1, \quad y \geq \cos \theta_0$$

의 중심은 $\left(0, \frac{\sin \theta_0}{\theta_0}\right)$ 임을 보이시오.

8. (20점) 나선 $C(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, (단, $0 \leq t \leq 2\pi$) 위에서 정의된 함수 $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ 에 대하여, 선적분 $\int_C f ds$ 를 구하시오.

9. (20점) 다음 곡선의 곡률을 구하시오.

$$X(t) = \left(\int_0^t \cos \frac{\pi u^2}{2} du, \int_0^t \sin \frac{\pi u^2}{2} du, t \right) \quad (\text{단, } 0 \leq t \leq 1)$$