

수학 및 연습 1 기말고사
2006년 6월 10일

학번 : _____ 이름 : _____

1. 선형사상 $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ 이 다음을 만족한다.

$$L(1, 1, 0) = (0, 0, 6),$$

$$L(0, 1, 1) = (0, 4, 2),$$

$$L(1, 0, 1) = (2, 2, 0).$$

- (a) (10점) L 을 나타내는 행렬을 구하라.

- (b) (10점) 세 점 $L(1, 0, 0)$, $L(0, 1, 0)$, $L(0, 0, 1)$ 을 꼭지점으로 갖는 삼각형의 넓이를 구하라.

- (c) (15점) 네 점 $L(0, 0, 0)$, $L(1, 0, 0)$, $L(0, 1, 0)$, $L(0, 0, 1)$ 으로 이루어진 사면체의 부피를 구하라.

2. (20점) \mathbb{R}^3 의 세 점 P, Q, R 이 원점을 지나는 동일 평면상에 있으면, $\det(P, Q, R) = 0$ 임을 보이라.

3. (20점) 벡터 $\mathbf{a} = (1, 1, 0)$ 에 대하여 선형변환

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{a} \times \mathbf{x} \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3)$$

에 대응되는 행렬을 M_a 라 할 때, M_a^{27} 의 각 성분의 합을 구하라.

4. 나선 $X(t) = (\cos t, \sin t, 2t)$ 위의 점 $P = (0, 1, \pi)$ 가 주어졌을 때,

- (a) (10점) P 에서의 접선의 식을 구하라.

- (b) (15점) P 에서의 접촉평면의 식을 구하라.

5. (10점) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 는 고정된 점 P 주위로 회전이동을 나타내는 사상이다. \mathbb{R}^2 상의 임의의 일급곡선 $X: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ 는 T 에 의하여 변화하여도 곡선의 길이는 변하지 않음을 보여라.

6. (20점) 직선 $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ 주위로 일정한 각속력 $\sqrt{3}$ 으로 회전하는 동점이 점 $(2, 3, 4)$ 을 지나는 순간의 속력을 구하라.

- ## 7. 곡선

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

에 대하여 다음에 답하라.

- (a) (10점) 곡선의 길이를 구하라.

- (b) (10점) 점 $(1, 0)$ 에서부터 ∞ 의 길이를 매개변수로 하여 표현하여라.

- (c) (10점) 점 $(\frac{1}{\sqrt{8}}, \frac{1}{\sqrt{8}})$ 에서의 곡률을 구하라.

8. (20점) 다음 식으로 주어진 곡선의 개형을 그리고, 이 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하라.

$$x^2 + y^2 = 2\sqrt{x^2 - y^2}$$

9. (20점) 공간속의 곡선 $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, y^2 + z^2 = 1, x > 0, y > 0, z > 0\}$ 에 대하여, C 위의 점 (x, y, z) 에서의 밀도함수가 $\mu(x, y, z) = xy$ 일 때 C 의 질량을 구하라.