수학 및 연습 1 기말고사

(2010년 6월 5일 오후 1:00-3:00)

학번:	이름:

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

문제 1 (20점). $P_1, P_2, \ldots, P_k$ 가 $\mathbb{R}^n$ 의 점들이고, 실수 M 이 충분히 클 때,

$$\{X \in \mathbb{R}^n \ : \ |X-P_1|^2 + |X-P_2|^2 + \cdots + |X-P_k|^2 = M\}$$

과 $\{X \in \mathbb{R}^n \ : \ |X-Q| = r\}$ 이 같도록 하는 점 Q 와 실수 r 이 존재한다. 이 때, Q 와 r 을 $P_1, P_2, \ldots, P_k$ 와 M 으로 나타내시오.

문제 2 (30점). 3차원 공간에서 평면 $x+2y+3z=0$ 에 대해, 벡터 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ 의 대칭점을 $\mathbf{y}$ 라 할 때,

(a) (10점) $\mathbf{y}$ 를 $\mathbf{x}$ 로 나타내시오.

(b) (10점) $L(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ 로 정의한 사상 $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 이 선형사상임을 보이시오.

(c) (10점) 선형사상 L 을 표현하는 행렬을 구하시오.

문제 3 (15점). 선형사상 $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 에 대해 $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ 인 $\mathbf{x}$ 는 $\mathbf{0}$ 뿐이라 하자. 벡터 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ 가 일차독립이면 $T(\mathbf{u})$, $T(\mathbf{v})$, $T(\mathbf{w})$ 도 일차독립임을 보이시오.

문제 4 (20점). A 가 모든 항이 실수인 n 차 정사각행렬일 때,

$$(-1)^n \det(-I + 2A - A^2) \geq 0$$

임을 보이시오. (단, I 는 n 차 단위행렬이다.)

문제 5 (15점). 행렬 $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ 에 대하여, $\det((A^{1005})^{\mathrm{t}})$ 를 구하시오.

문제 6 (20점). 좌표공간에서 곡선이

$$X(t) = \Big(\int_1^t e^{u^2} du, \int_0^{\frac{\pi}{2}t} \cos u \, du, \int_0^{\log t} e^u du \Big) \times (t, 1, 1)$$

로 주어졌을 때, $t = 1$ 에서 접선의 매개변수 방정식을 구하시오.

문제 7 (25점). 데카르트 곡선 $x^3 + y^3 = 3xy$ $(x, y \geq 0)$ 에 대해 다음에 답하시오.

(a) (10점) 극좌표계를 써서 데카르트 곡선을 $r = f(\theta)$ 꼴로 나타내시오.

(b) (15점) 이 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하시오.

문제 8 (25점). 다음 곡선의 중심의 x 좌표를 구하시오.

$$X(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

문제 9 (30점).

(a) (20점) 정규곡선 $X : I \to \mathbb{R}^3$ 에 대하여, 곡률은

$$\kappa = \frac{|X' \times X''|}{|X'|^3}$$

임을 유도하시오.

(b) (10점) 곡선 $X(t) = (3e^t, \sqrt{6}t, e^{-t})$ 에서 $t = 0$ 일 때의 곡률을 구하시오.