

수학 및 연습 1 기말고사
(2009년 6월 6일 오후 1:00-3:00)

| | |
|-----|-----|
| 학번: | 이름: |
|-----|-----|

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

문제 1 (15점). 4차원 좌표공간에서 두 식 $x + y + z + w = 2$, $2x + y + 2z + w = 3$ 을 동시에 만족하는 점들과 원점 O 사이의 최소거리를 구하라.

문제 2 (20점). 삼차원 공간의 원점에서 $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$ 방향으로 발사된 빛이 세 점

$$P = (1, 2, 3), Q = (2, 3, 1), R = (3, 1, 2)$$

을 포함하는 평면에 반사될 때, 반사된 빛이 xy -평면과 만나는 점을 구하라.

문제 3 (30점). 두 벡터 \mathbf{u}, \mathbf{v} 는 \mathbb{R}^3 의 서로 수직인 단위벡터이다. H 를 \mathbf{u} 와 \mathbf{v} 를 포함하는 평면이라 할 때, 다음 질문에 답하라. (단, \mathbf{u}, \mathbf{v} 는 시점이 원점인 벡터이다.)

- (a) \mathbb{R}^3 의 벡터 \mathbf{a} 에 대하여 \mathbf{a} 와 가장 가까운 H 위의 벡터는 $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}$ 임을 보이라.
- (b) $P(\mathbf{a}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}$ 로 정의된 사상 $P: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 는 선형사상임을 보이라.
- (c) $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$, $\mathbf{v} = (0, 1, 0)$ 일 때, (b)의 선형사상 P 에 대응되는 3×3 행렬 A 를 구하라.

문제 4 (20점). 실수 a, b, c 에 대하여 3×3 행렬 $L(a, b, c)$ 를 $L(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ 라 정의하자.

행렬

$$L(1, 0, 2)^{2009}$$

의 모든 항의 합을 구하라.

문제 5 (20점). 다음 질문에 답하라.

- (a) 행렬 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ 에 대하여, $\det A$ 와 $\det(A^{-2009})$ 를 구하라.

(단, 자연수 n 에 대하여 $A^{-n} := (A^{-1})^n$ 이다.)

- (b) 삼차원 좌표공간 속에

$$\{(x, y, z) = (1, 2, 3) + r(-1, 1, 2) + s(0, 2, 3) + t(3, 2, -1) : 1 \leq r \leq 2, 2 \leq s \leq 3, 0 \leq t \leq a\}$$

로 주어진 도형의 부피가 10이 되도록 하는 상수 a 의 값을 구하라.

문제 6 (15점). 곡선 $X(t) = (\sin t, \cos t, t)$ 의 $t = \frac{\pi}{6}$ 인 점에서 접촉평면의 식을 구하라.

문제 7 (30점). 곡선

$$X(\theta) = (\cos \theta - \sin \theta \cos \theta, \sin \theta - \sin^2 \theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

의 길이 l 과 이 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이 A 를 각각 구하라.

문제 8 (30점). 단위구면 위의 곡선

$$X(t) = (\sin t \cos t, \sin^2 t, \cos t), \quad 0 \leq t \leq \pi$$

의 밀도함수가 $\mu(x, y, z) = \sqrt{y}$ (단, $y \geq 0$) 일 때, 이 곡선의 질량 m 과 질량중심의 y -좌표 \bar{y} 를 구하라.

문제 9 (20점). 곡선

$$X(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t, t + \sin t, \cos t)$$

에 대하여 $t = \frac{\pi}{4}$ 인 점에서의 곡률벡터와 곡률을 구하라.