< 2012년 여름 계절학기 수학 및 연습 1 기말고사 >

#1. $a = \mathrm{Proj}_v a + (a - \mathrm{Proj}_v a)$

i) $\mathrm{Proj}_v a = \dfrac{v \cdot a}{v \cdot v} v = \dfrac{1}{2}(3,-1,0)$ ⌟ +10

ii) $a - \mathrm{Proj}_v a = (2,1,-3) - \dfrac{1}{2}(3,-1,0) = \dfrac{1}{2}(1,3,-6)$ ⌟ +10.

$$\therefore\ a = \underbrace{\frac{1}{2}(3,-1,0)}_{v\text{에 평행.}} + \underbrace{\frac{1}{2}(1,3,-6)}_{v\text{에 수직.}}$$

#2 CBS 부등식에 의해

$$1 = (x + 2y + 3z)^2 \le (2x^2 + y^2 + 5z^2)\left(\frac{1}{2} + 4 + \frac{9}{5}\right)$$

이 된다. 따라서

$$2x^2 + y^2 + 5z^2 \ge \frac{10}{63}$$

이 되어 최솟값은 $\frac{10}{63}$ 이 된다.

사소한 계산 실수 5점 감점.

그 외 부분점수 없음.

3.

① 벡터 $\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \mathbb{a}_3$ 가 일차독립임을 보이기 위해서 방정식

$$x_1 \mathbb{a}_1 + x_2 \mathbb{a}_2 + x_3 \mathbb{a}_3 = \mathbb{0} \quad \cdots (1)$$

의 해가 자명한 해 ($x_1 = x_2 = x_3 = 0$) 밖에 없음을 보이면 된다.

$x_1 \mathbb{a}_1 + x_2 \mathbb{a}_2 + x_3 \mathbb{a}_3 = \mathbb{0}$

$\Rightarrow T(x_1 \mathbb{a}_1 + x_2 \mathbb{a}_2 + x_3 \mathbb{a}_3) = T(\mathbb{0}) = \mathbb{0}$ ($\because$ T가 선형사상이므로 $T(\mathbb{0}) = \mathbb{0}$)

$\Rightarrow x_1 T(\mathbb{a}_1) + x_2 T(\mathbb{a}_2) + x_3 T(\mathbb{a}_3) = \mathbb{0}$ ($\because$ T가 선형이므로 $T(\mathbb{x} + c\mathbb{y}) = T(\mathbb{x}) + cT(\mathbb{y})$)

$\Rightarrow x_1 \mathbb{b}_1 + x_2 \mathbb{b}_2 + x_3 \mathbb{b}_3 = \mathbb{0} \quad \cdots (2)$

(2) 의 방정식의 해가 자명한 해 밖에 없음을 $\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2, \mathbb{b}_3$ 가 일차독립인 것을 통해서 알 수 있으므로, (1) 의 방정식도 자명한 해 밖에 존재하지 않음을 알 수 있다.

② $\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \mathbb{a}_3$ 가 일~~차~~종속이라고 가정하자.

그러면 적어도 하나는 0 이되지 않는 두 실수 p, q 에 대해서

$\mathbb{a}_1 = p\,\mathbb{a}_2 + q\,\mathbb{a}_3$ 가 성립한다고 가정할 수 있다.

$\therefore T(\mathbb{a}_1) = T(p\,\mathbb{a}_2 + q\,\mathbb{a}_3) = pT(\mathbb{a}_2) + qT(\mathbb{a}_3)$

$\Rightarrow \mathbb{b}_1 = p\,\mathbb{b}_2 + q\,\mathbb{b}_3$

$\Rightarrow \mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2, \mathbb{b}_3$ 가 일차독립이라는 조건에 모순.

③ T 가 선형사상이므로 모든 $\mathbb{x} \in \mathbb{R}^3$ 에 대하여 $A\mathbb{x} = T(\mathbb{x})$ 를 만족하는 3X3 행렬 A 가 존재한다.

$\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2, \mathbb{b}_3$ 가 일차독립이므로 $\det(\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2, \mathbb{b}_3) \neq 0$ 이고,

$$\begin{aligned}
\det(\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2, \mathbb{b}_3) &= \det(T(\mathbb{a}_1), T(\mathbb{a}_2), T(\mathbb{a}_3)) \\
&= \det(A\mathbb{a}_1, A\mathbb{a}_2, A\mathbb{a}_3) \\
&= \det(A(\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \mathbb{a}_3)) \\
&= \det A \cdot \det(\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \mathbb{a}_3)
\end{aligned}$$

$\therefore \det(\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \mathbb{a}_3) \neq 0$ 이므로 $\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \mathbb{a}_3$ 는 일차독립이다.

* $T(x)=0 \Rightarrow x=0$ 임을 가정하여 풀경우 0점.

(T가 1-1 이 아닌 경우 성립하지 않는다)

그 외에 부분점수 없음.

#4.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -4 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$: 1열에 대한 전개

$$= 1 \times \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-4-3) - (1+15)$$

$$= -7 - 16 = -23$$

* 부분점수 없음.

#5. • $T(X+Y) = (a \times (X+Y)) \times a$

$= (a \times X + a \times Y) \times a$

$= (a \times X) \times a + (a \times Y) \times a$

$= T(X) + T(Y)$.

• $T(cX) = (a \times cX) \times a$

$= c(a \times X) \times a$

$= c((a \times X) \times a)$

$= cT(X)$. ∴ T는 선형사상임.

• $T(e_1) = (a \times e_1) \times a = (0, a_3, -a_2) \times (a_1, a_2, a_3)$

$= (a_2^2 + a_3^2, -a_1a_2, -a_1a_3)$

$T(e_2) = (a \times e_2) \times a = (-a_3, 0, a_1) \times (a_1, a_2, a_3)$

$= (-a_1a_2, a_1^2 + a_3^2, -a_2a_3)$

$T(e_3) = (a \times e_3) \times a = (a_2, -a_1, 0) \times (a_1, a_2, a_3)$

$= (-a_1a_3, -a_2a_3, a_1^2 + a_2^2)$

∴ T에 대응되는 행렬은 $\begin{pmatrix} a_2^2+a_3^2 & -a_1a_2 & -a_1a_3 \\ -a_1a_2 & a_1^2+a_3^2 & -a_2a_3 \\ -a_1a_3 & -a_2a_3 & a_1^2+a_2^2 \end{pmatrix}$

* 채점기준 : 선형사상임을 보이는 것 10점 (단, 풀이가 전혀 없이 정의만 있으면 5점감점)

행렬을 찾는 부분 15점 (부분점수 없음).

#6. $X(t) = (t-\sin t,\ 1-\cos t) \qquad t\in[\pi/2,\ 3\pi/2]$

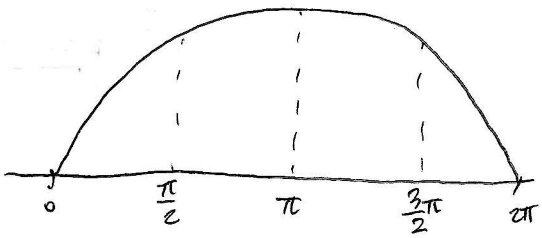
$X'(t) = (1-\cos t,\ \sin t)$

$|X'(t)| = \sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t} = \sqrt{2-2\cos t} = \left|2\sin\frac{t}{2}\right| = 2\sin\frac{t}{2}$

$(\because\ t\in[\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}])$

① $l = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 2\sin\frac{t}{2}\, dt = 4\sqrt{2}$ //

② $\bar{x}$: cycloid의 graph의 대칭성에 의해



π //

③ $\bar{y} = \frac{1}{l}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (1-\cos t)\cdot 2\sin\frac{t}{2}\, dt = \frac{5}{3}$ //

채점기준

· 각 step의 계산 과정에서 선적분의 정의를 언급하면 5점.

· ②에서 대칭성을 이용하지 않고 적분을 한 경우 선적분 식만 맞으면 5점, 답도 맞으면 10점.

#7. $x^2 + 4y^2 = 1$

$\Rightarrow$ $X(t) = (\cos t, \frac{1}{2}\sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$

$t = \pi$ 일때 $X(\pi) = (-1, 0)$.

i) $\mathbb{K}(t) = \dfrac{1}{|X'(t)|}\left(\dfrac{X'(t)}{|X'(t)|}\right)' = \dfrac{|X'(t)|^2 X''(t) - (X'\cdot X'')X'}{|X'(t)|^4}$ +5

$X'(t) = (-\sin t, \frac{1}{2}\cos t) \Rightarrow X'(\pi) = (0, -\frac{1}{2})$

$X''(t) = (-\cos t, -\frac{1}{2}\sin t) \Rightarrow X''(\pi) = (1, 0)$

$\therefore$ $\mathbb{K}(\pi) = (4, 0)$ +10

ii) 접촉원

반지름 $= \dfrac{1}{\kappa(\pi)} = \dfrac{1}{4}$

중심 $= X(\pi) + \dfrac{\mathbb{K}(\pi)}{\kappa(\pi)^2} = (-1, 0) + \dfrac{1}{16}(4, 0) = (-\frac{3}{4}, 0)$

$\therefore$ $(x + \frac{3}{4})^2 + y^2 = (\frac{1}{4})^2$. +10

<채점기준>

- 곡률벡터 $\mathbb{K}(\pi) = (4, 0)$ 를 정확히 계산하지 않으면 (−10)

#8. 함수 $g : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ 가 곡선 X 의 동향재매개화 $\tilde{X}(s) := X(g(s))$ 를 준다고 하자. 그러면

$$
\begin{aligned}
(\text{곡선 } \tilde{X} \text{의 길이}) &= \int_{\alpha}^{\beta} |\tilde{X}'(s)|\, ds \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} |X'(g(s))|\, g'(s)\, ds \\
&= \int_{a}^{b} |X'(t)|\, dt \\
&= (\text{곡선 } X \text{의 길이})
\end{aligned}
$$

20점 ⊛

가 된다. 역향 재매개화도 같은 방법으로 보인다. 5점

<채점기준>

(⊛ 까지 정확하게 보이면 20점
이 때 적분의 범위 등이 명확하지 않으면 0점.)
역향 재매개화의 경우를 언급하면 5점

total 25점.

#9. $\vec{v} = \vec{w} \times \vec{p}$.

$\vec{w} = (2, -1, -1)$

$\vec{p} = (3, 4, 7) - (-1, 1, 2) = (4, 3, 5)$

$\therefore \ \vec{v} = (2, -1, -1) \times (4, 3, 5)$ +10

$= (-2, -14, 10)$ +10