

수학 및 연습 1 기말고사

(2010년 7월 26일 11:00-13:00)

학번:	이름:
-----	-----

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

문제 1 (25점). 공간의 두 평면 $x + y - z = 2$ 와 $3x - 4y + 5z = 6$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점) 두 평면의 교선의 방정식을 구하고, 두 평면 사이의 각을 θ 라고 할 때 $\sin \theta$ 를 구하시오. (단, $0 \leq \theta \leq \pi$ 이다.)
- (b) (15점) 점 $(2, 0, 0)$ 을 지나고 위의 두 평면의 교선에 수직인 직선 중에서 평면 $4x - 3y + 4z = 8$ 에 속하는 직선의 방정식을 구하시오.

문제 2 (20점). 세 벡터 X, Y, Z 가 일차 독립일 때, 세 벡터

$$X + Y - 3Z, \quad 2X - Z, \quad 2Y - 5Z$$

가 일차독립인지 일차종속인지 판정하시오.

문제 3 (25점). P_n 을 차수가 n 이하인 다항식 전체 집합이라고 하면, 다항식 $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ 은 다항식의 계수들로 만들어지는 벡터 (a_0, a_1, \dots, a_n) 와 동일하게 생각할 수 있다. 다음 사상 T 가 선형사상임을 보이고, 선형사상에 대응하는 행렬을 구하시오.

$$T : P_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$$
$$T(a + bx) = \left(\int_0^1 (a + bx)dx, a \right)$$

문제 4 (20점). 삼차원 공간에서 벡터 (x, y, z) 를 벡터 $(1, 2, 2)$ 에 대한 정사영으로 나타내는 선형사상에 대하여, 이 사상에 대응되는 행렬과 행렬식을 구하시오.

문제 5 (20점). 곡선 $X(t) = (e^t \cos t, e^t, t)$ 위의 점 $(1, 1, 0)$ 에서 접촉평면의 식을 구하시오.

문제 6 (20점). 극좌표로 주어진 다음 곡선의 길이를 구하시오.

$$r = \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos \frac{\theta}{2}, \quad (0 \leq \theta \leq 4\pi)$$

문제 7 (20점). 네 점 $(2, 0, 1), (3, 2, 4), (1, 1, -4), (2, -1, 3)$ 을 꼭지점으로 하는 사면체의 부피를 구하시오.

문제 8 (30점). 사이클로이드 $X(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, $(0 \leq t \leq 2\pi)$ 에 대하여,

- (a) (15점) 곡선의 중심을 구하시오.
- (b) (15점) 곡선의 곡률이 최소가 되는 점에서의 곡률반경을 구하시오.

문제 9 (20점). 극좌표계에서

$$0 \leq \sqrt{2} \cos \theta \leq r \leq 1 + \sqrt{2} \cos \theta$$

로 주어진 영역의 넓이를 구하시오.