

수학 및 연습 1 (005-013) 기말고사

2003년 7월 23일 (水) 오전 11시 – 오후 1시

학번:

이름:

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오(총점 200점).

1. (20점) 3차원 공간의 원점 O 에서 $(1, 1, 1)$ 방향으로 발사된 빛이 평면 $x+y+3z=2$ 에 위치한 거울에 반사되었을 때, 반사된 빛이 평면 $x+y-z=3$ 과 만나는 점을 구하라.

2. 3차원 공간에 세 점 $P = (1, 2, 5)$, $Q = (-1, 1, 0)$, $R = (1, 3, 4)$ 이 주어져 있다.

(a) (15점) 세 점을 포함하는 평면의 방정식을 구하라.

(b) (15점) 세 점과 원점 O 를 꼭지점으로 갖는 사면체의 부피를 구하라.

3. (20점) 3차원 공간 속의 두 직선

$$\frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{4}, \quad x-1 = y-2 = z-1$$

사이의 최단거리를 구하라.

4. 벡터 $\mathbf{v} = \frac{1}{3}(1, -2, 2)$ 에 대하여, 선형사상 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 를

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{v} \times \mathbf{x}$$

로 정의하자.

(a) (10점) f 에 대응하는 행렬을 구하라.

(b) (15점) $f^1 = f$ 로 두고, 모든 자연수 n 에 대하여 $f^{n+1} = f \circ f^n$ 이라고 할 때, $f^{101}(1, 2, 3)$ 를 구하라.

5. 3차원 공간에서 다음 두 곡선에 대하여 물음에 답하라.

$$X(t) = (e^t, e^{2t}, 1 - e^{-t}), \quad Y(t) = (1 - t, \cos t, \sin t)$$

(a) (10점) 두 곡선의 교점을 모두 구하라.

(b) (15점) (a)에서 구한 교점에서의 두 접선의 교각을 구하라.

6. (20점) 극좌표로 주어진 두 영역의 공통부분의 넓이를 구하라.

$$\begin{cases} 0 \leq r \leq 2(1 - \cos \theta) \\ 0 \leq r \leq 2(1 + \cos \theta) \end{cases}$$

7. 곡선 $X(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$)에 대하여 다음 물음에 답하라.

(a) (15점) 주어진 곡선을 호의 길이로 매개화하여라.

(b) (15점) 주어진 곡선의 중심을 구하라.

8. 곡선 $X(t) = (2 \sin t, 3 \cos t, t)$ 가 주어져 있다.

(a) (15점) $t = \frac{\pi}{4}$ 일 때, 접축평면의 방정식을 구하라.

(b) (15점) $t = \frac{\pi}{4}$ 일 때, 이 곡선의 곡률을 구하라.