2015 수학 및 연습 1 기말고사 모범답안

1. (풀이 1)

실수 x, y, z에 대하여 $x\mathbb{b}+y(\mathbb{a}\times\mathbb{b})+z(\mathbb{a}\times(\mathbb{a}\times\mathbb{b}))=\mathbb{0}$ 을 만족한다고 하자.

양변에 $\mathbb{a}$를 내적하면 $x(\mathbb{a}\cdot\mathbb{b})=0$. $\mathbb{a}\cdot\mathbb{b}\neq 0$ 이므로 $x=0$.

〃 $\mathbb{a}\times\mathbb{b}$ 〃 $y|\mathbb{a}\times\mathbb{b}|^2=0$. $\mathbb{a}\times\mathbb{b}\neq\mathbb{0}$ 이므로 $y=0$.

$\mathbb{a}$와 $\mathbb{a}\times\mathbb{b}$는 수직이고 둘 다 영벡터가 아니므로 $\mathbb{a}\times(\mathbb{a}\times\mathbb{b})\neq\mathbb{0}$.

$x=y=0$ 이므로 $z(\mathbb{a}\times(\mathbb{a}\times\mathbb{b}))=\mathbb{0}$ $\Rightarrow$ $z=0$.

$x=y=z=0$ 이므로 $\mathbb{b}$, $\mathbb{a}\times\mathbb{b}$, $\mathbb{a}\times(\mathbb{a}\times\mathbb{b})$는 일차독립이다.

- 일차독립이면 자명한 해 ($x=y=z=0$)만 가진다는 언급이 있으면 +5점.
- x, y, z중 하나만 0임을 보인 경우 10점.

(풀이 2)

$$\det(\mathbb{b}\,|\,\mathbb{a}\times\mathbb{b}\,|\,\mathbb{a}\times(\mathbb{a}\times\mathbb{b})) = (\mathbb{b}\times(\mathbb{a}\times\mathbb{b}))\cdot(\mathbb{a}\times(\mathbb{a}\times\mathbb{b}))$$
$$= (\mathbb{b}\cdot\mathbb{a})|\mathbb{a}\times\mathbb{b}|^2-(\mathbb{b}\cdot(\mathbb{a}\times\mathbb{b}))((\mathbb{a}\times\mathbb{b})\cdot\mathbb{a})$$
$$= (\mathbb{a}\cdot\mathbb{b})|\mathbb{a}\times\mathbb{b}|^2 \qquad (\because \mathbb{b}\text{와 } \mathbb{a}\times\mathbb{b}\text{는 수직}).$$

$\mathbb{a}\cdot\mathbb{b}\neq 0$, $\mathbb{a}\times\mathbb{b}\neq\mathbb{0}$ 이므로 $\det\neq 0$.

$\Rightarrow$ $\mathbb{b}$, $\mathbb{a}\times\mathbb{b}$, $\mathbb{a}\times(\mathbb{a}\times\mathbb{b})$는 일차독립이다.

- $\det(\mathbb{b}\,|\,\mathbb{a}\times\mathbb{b}\,|\,\mathbb{a}\times(\mathbb{a}\times\mathbb{b}))\neq 0$ 임을 보이면 된다는 설명이 있으면 +5점.
- det 계산 과정에서 0이 아닌 것이 자명하지 않은데 0이 아니라고 한 경우 −5점.
- 사소한 계산 실수 −5점.
- 외적 공식 잘못 적용한 경우 점수 없음.

※ 그 외

- 세 벡터가 한 평면에 들어갈 수 없음을 보인 경우 충분한 설명이 있으면 인정.
- $\mathbb{b}\perp\mathbb{a}\times\mathbb{b}$, $\mathbb{a}\times\mathbb{b}\perp\mathbb{a}\times(\mathbb{a}\times\mathbb{b})$ 임을 이용해서 $\mathbb{a}\times\mathbb{b}$가 $\mathbb{b}$와 $\mathbb{a}\times(\mathbb{a}\times\mathbb{b})$의 선형결합으로 표현될 수 없다는 것만 보인 경우 10점.
- 벡터 A, B, C가 일차독립인 경우 $A\times B$, $B\times C$, $C\times A$도 일차독립이라는 사실을 이용한 경우, 이를 증명하지 않으면 점수 없음.

#2 모범답안 I

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AB}|} = \frac{(\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{QP})\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AP}|\,|\overrightarrow{AB}|}$$

10점

$$= \frac{\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AP}|\cdot|\overrightarrow{AB}|}$$

$\overrightarrow{QP}\perp\overrightarrow{AB}$ 이므로

$$= \frac{\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{AB}+0}{|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AB}|}$$

$$= \frac{(2,2,3)\cdot(1,2,2)}{8\cdot 3} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$

15점

$$\therefore\ \theta = \frac{\pi}{3}$$

20점

모범답안 Ⅱ.

$\boxed{\#2}$. $\overrightarrow{AQ} = (2, 2, 3)$, $\overrightarrow{BQ} = (1, 0, 1)$

$\overrightarrow{AQ} \times \overrightarrow{BQ} = (2, 1, -2)$ ┘5점 $P = (3+2t, 4+t, 6-2t)$

$|\overrightarrow{AP}| = 8 \Rightarrow (2t+2)^2 + (t+2)^2 + (-2t+3)^2 = 64$

$9t^2 = 47 \quad \therefore t = \frac{\pm\sqrt{47}}{3}$

┘5점

$|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AB}| \cos\theta = \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB}$

┘5점

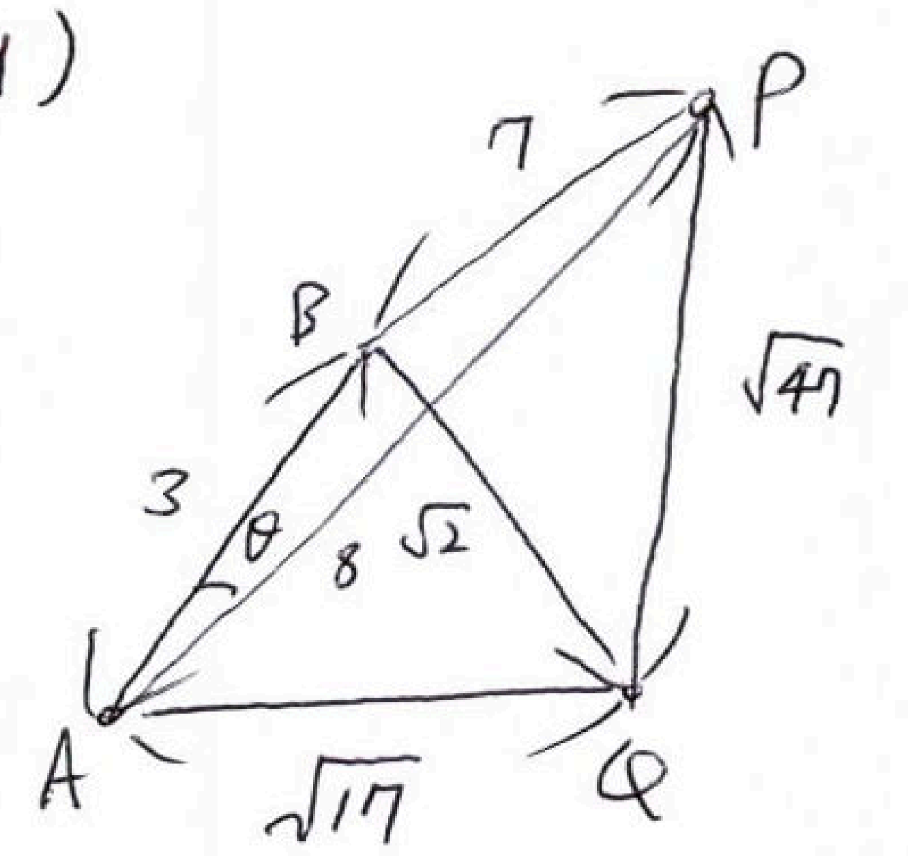
$\Rightarrow 8 \cdot 3 \cos\theta = (2t+2, t+2, -2t+3) \cdot (1, 2, 2)$

$= 12$

$\cos\theta = \frac{1}{2} \quad \theta = \frac{\pi}{3}$

┘5점

#2 (별해)



$$\cos\theta = \frac{64+9-49}{2\cdot 3\cdot 8} = \frac{1}{2} \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{3}$$

-20

* 계산 실수 부분점수 없음.

3번 모범답안

3-(a)

G가 가역행렬이면

$$\det A = \det(AGG^{-1}) = \det(G^{-1}AG) \quad (\because \det AB = \det BA)$$

$$= \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -2 & -3 & -5 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= (0+24-20)$$
$$-(-36+0-8)$$

$$= 48$$

- $\det A = \det(GAG^{-1})$ 언급시 +5
- det 계산에 문제가 없을시 +5

3-(b)

A, B 가 조건을 만족하는 $\overbrace{\text{가역행렬}}^{n\times n}$이라 하자. 그러면

$$\det(AB) = \det(2BA)$$

$$\Rightarrow \quad \det A \cdot \det B = 2^n \det B \cdot \det A$$

그런데 A, B는 가역이므로, det A 와 det B는 0 이 아니다. (★)

따라서 그 둘을 약분하면

$$1 = 2^n \quad (n\text{은 자연수})$$

가 되어 모순이다. 그러므로 애초에 그런 A, B는 존재하지 않는다. Q.E.D

- $\det 2X = 2\det X$ 혹은 $4\det X$ 등으로 적은 경우 −5 점
- (※)를 제대로 언급하지 않은 채 양변에서 $\det A$, $\det B$를 제거한 경우 −5 점

- 완전히 잘못된 논리를 편 경우 (ex) $AB=BA$ 등…) 점수 없음

[#4] (a) $\mathbb{V}_3$를 $\mathbb{V}_1 \times \mathbb{V}_2$라 두면, $\mathbb{V}_3$는 $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2$ 모두에 수직인 단위벡터이다. $\mathbb{X} = \mathbb{V} + t\mathbb{V}_3$로 쓸수 있고,

$$\begin{aligned} \mathbb{X}\cdot\mathbb{V}_1 &= (\mathbb{V} + t\mathbb{V}_3)\cdot\mathbb{V}_1 \\ &= \mathbb{V}\cdot\mathbb{V}_1 \\ &= a_1 \quad (\because |\mathbb{V}_1|^2 = 1 \ \& \ \mathbb{V}_1\cdot\mathbb{V}_2 = 0) \end{aligned}$$

마찬가지로 $\mathbb{X}\cdot\mathbb{V}_2 = (\mathbb{V} + t\mathbb{V}_3)\cdot\mathbb{V}_2$

$$= \mathbb{V}\cdot\mathbb{V}_2 = a_2$$

[채점기준]

- "일반성을 잃지 않고 $\mathbb{V}_1$과 $\mathbb{V}_2$를 간단한 벡터 (예: e_1, e_2)로 두고 푼 경우"는 그 경우가 충분한 것이라는 걸 설명하지 못하면 −5점
- $\mathbb{X} - [(\mathbb{V}_1\times\mathbb{V}_2)\cdot\mathbb{X}](\mathbb{V}_1\times\mathbb{V}_2) = (\mathbb{V}_1\cdot\mathbb{X})\mathbb{V}_1 + (\mathbb{V}_2\cdot\mathbb{X})\mathbb{V}_2$ 를 아무런 설명없이 쓴 경우 0점
- $\mathbb{V}^2$, $\frac{X\cdot\mathbb{V}}{\mathbb{V}^2}$ 등 notation 오용 −2점
- 적절한 말, 그림 설명과 함께 $\mathbb{V} = P_{\mathbb{V}_1}(\mathbb{X}) + P_{\mathbb{V}_2}(\mathbb{X})$를 설명하고 푼 경우 10점.

(b) $L(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}\cdot\mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 + (\mathbf{x}\cdot\mathbf{w}_2)\mathbf{w}_2$

실수 t와 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$에 대하여

$$L(t\mathbf{x}+\mathbf{y}) = [(t\mathbf{x}+\mathbf{y})\cdot\mathbf{w}_1]\mathbf{w}_1 + [(t\mathbf{x}+\mathbf{y})\cdot\mathbf{w}_2]\mathbf{w}_2$$

$$= t[(\mathbf{x}\cdot\mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 + (\mathbf{x}\cdot\mathbf{w}_2)\mathbf{w}_2] + [(\mathbf{y}\cdot\mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 + (\mathbf{y}\cdot\mathbf{w}_2)\mathbf{w}_2]$$

$= tL(\mathbf{x}) + L(\mathbf{y})$ 이므로 선형사상.

[채점기준]

- $\begin{cases} L(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = L(\mathbf{x}) + L(\mathbf{y}) \\ L(t\mathbf{x}) = tL(\mathbf{x}) \end{cases}$ 를 보인 경우 각각 5점씩.
- 단순히 "정사영은 선형사상" 이라고 쓰고 선형사상임을 주장한 경우 점수 없음.
- 그림으로 설명을 시도 한 경우, 정확한 그림과 설명이 있어야 점수 인정

(c) $L(e_1) = (e_1 \cdot \mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 + (e_1 \cdot \mathbf{w}_2)\mathbf{w}_2$

$L(e_2) = (e_2 \cdot \mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 + (e_2 \cdot \mathbf{w}_2)\mathbf{w}_2$

$L(e_3) = (e_3 \cdot \mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 + (e_3 \cdot \mathbf{w}_2)\mathbf{w}_2$

$$\therefore\ M = \underbrace{\left(L(e_1) \,\middle|\, L(e_2) \,\middle|\, L(e_3) \right)}_{+5\text{점}}$$

$$\overset{①}{=} \left((e_1 \cdot \mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 + (e_1 \cdot \mathbf{w}_2)\mathbf{w}_2 \,\middle|\, (e_2 \cdot \mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 + (e_2 \cdot \mathbf{w}_2)\mathbf{w}_2 \,\middle|\, (e_3 \cdot \mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 + (e_3 \cdot \mathbf{w}_2)\mathbf{w}_2 \right)$$

만일 $\mathbf{w}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{w}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ 라면

$$\overset{②}{=} \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 & x_2 y_2 + x_1 y_1 & x_2 z_2 + x_1 z_1 \\ x_2 y_2 + x_1 y_1 & y_1^2 + y_2^2 & y_2 z_2 + y_1 z_1 \\ x_2 z_2 + x_1 z_1 & y_2 z_2 + y_1 z_1 & z_1^2 + z_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{③}{=} I_3 - (\mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2)(\mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2)^t$$ (단, $\mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2$는 열벡터로 써야함)

$$\overset{④}{=} \left(\mathbf{w}_1 \,\middle|\, \mathbf{w}_2 \,\middle|\, 0 \right) \left(\mathbf{w}_1 \,\middle|\, \mathbf{w}_2 \,\middle|\, \mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2 \right)^{-1}$$

[채점기준]

- M이 $L(e_1), L(e_2), L(e_3)$를 열벡터로 쓴 행렬이라는 것 까지 쓴 경우는 5점 (행벡터로 잘못적은 경우는 0점)
- M을 ①, ②, ③, ④ 중 어떤 형태로 쓰던지 간에 올바르면 만점. (단, ④의 경우 $(\mathbf{w}_1 | \mathbf{w}_2 | \mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2)$의 가역성을 언급하지 않으면 −2점)
- 행렬의 성분을 잘못 적는 등 사소한 실수 −2점

5번.

풀이 1

$\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0)$ $\quad \overrightarrow{AD} = (0, -1, 1)$

$\overrightarrow{AC} = (-2, 1, 1)$

$\overrightarrow{AE} = (1, 2, 2)$

$\triangle ABCE$ 부피 $= \frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\right| = \frac{5}{6}$

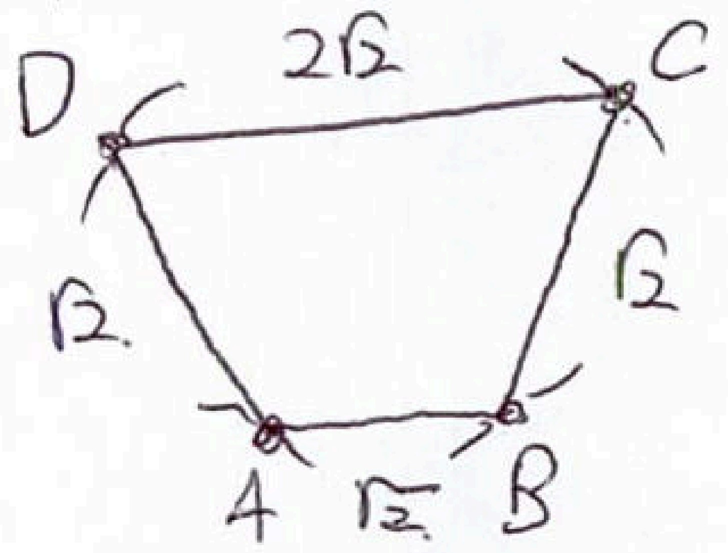
10점

$\triangle ACDE$ 부피 $= \frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right| = \frac{10}{6}$

10점

$\therefore$ 답 $= \frac{5}{6} + \frac{10}{6} = \frac{5}{2}$

풀이 2.



밑면 $\square ABCD$ 넓이 $= 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

높이 $=$ E 와 평면$(x+y+z=1)$ 사이 거리 $= \frac{|2+2+2-1|}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}}$

부피 $= \frac{1}{3} \times$ 밑면 $\times$ 높이 $= \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{3}}{2} \times \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5}{2}$

채점기준: 밑면 10점

높이 10점

답 계산 틀리면 -5점.

6번.

$t = x - 2y > 0$ 에서

$e^t = (2(x-y)-x)(2(x-y)+x)$

$= t(2x+t)$

$\therefore x = \frac{1}{2}\left(\frac{e^t - t^2}{t}\right), \quad y = \frac{1}{4}\left(\frac{e^t - 3t^2}{t}\right)$

$\therefore X(t) = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{e^t - t^2}{t}\right), \frac{1}{4}\left(\frac{e^t - 3t^2}{t}\right)\right), \quad t > 0$ — $\boxed{\text{각 성분별 5점}}$

속도벡터

$X'(t) = \left(\frac{te^t - e^t}{2t^2} - \frac{1}{2}, \frac{te^t - e^t}{4t^2} - \frac{3}{4}\right)$

$\therefore X'(1) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$ — $\boxed{\text{15점}}$

- 이 때, $X'(t)$가 틀리면 $X'(1)$이 맞더라도 점수없음

  $X'(1)$이 틀렸을 때 $X'(t)$는 성분별로 부분점수 있음 (각 5점)

~~문제 4~~.

문제 7.

① 곡선의 길이.

$$X'(t) = (e^t\cos t - e^t\sin t,\ e^t\sin t + e^t\cos t,\ e^t)$$

$$|X'(t)| = \sqrt{3}\,e^t$$

$$\therefore\ (\text{곡선의 길이}) = \int_0^{2\pi} \sqrt{3}\cdot e^t\, dt = \sqrt{3}\cdot(e^{2\pi}-1)$$ 10

② 점 (1, 0, 1) 로부터 잰 곡선의 길이가 $\sqrt{3}$ 인 점.

$$X(0) = (1, 0, 1).$$

$$\sqrt{3} = \int_0^t |X'(u)|\, du = \sqrt{3}\cdot(e^t-1) \Rightarrow \therefore\ t = \log 2 \quad (\text{or } \ln 2)$$ 5

③ 곡률벡터.

$$\mathbb{K} = \frac{1}{|X'|}\left(\frac{X'}{|X'|}\right)' = \frac{1}{\sqrt{3}\cdot e^t}\left(\frac{1}{\sqrt{3}e^t}(e^t\cos t - e^t\sin t,\ e^t\sin t + e^t\cos t,\ e^t)\right)'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}\cdot e^t}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(\cos t - \sin t,\ \sin t+\cos t,\ 1)\right)'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}\,e^t}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(-\sin t - \cos t,\ \cos t - \sin t,\ 0)\right)$$

$$= \frac{1}{3e^t}\left(-\sin t - \cos t,\ \cos t - \sin t,\ 0\right)$$

$t = \ln 2$ 대입,

$$\therefore\ \mathbb{K}\Big|_{t=\ln 2} = \frac{1}{6}\left(-\sin(\ln 2) - \cos(\ln 2),\ \cos(\ln 2) - \sin(\ln 2),\ 0\right)$$ 10

※ 채점기준.

① : 공식을 알고, 답을 틀리면 +5
공식과 답 모두 맞을 경우 +10

② : 답을 정확히 구하면, +5.
그 외, 0

③ : ①의 채점 기준과 같음.

8. 호의 길이를 매개변수 s라 하자. $X(x) = (x, \frac{1}{2}\cosh 2x)$ 이므로

$$s = \int_0^x |X'(u)|\, du.$$

$$= \int_0^x \sqrt{1+\sinh^2 2u}\, du.$$ 5점.

$$= \int_0^x \cosh 2u\, du$$

$$= \frac{1}{2}\sinh 2u \Big]_0^x = \frac{1}{2}\sinh 2x.$$

$\rightsquigarrow$ $x = \frac{1}{2}\sinh^{-1}(2s).$ 5점

(*) $2s = \dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}$

$\rightsquigarrow$ $e^{4x} - (4s)e^{2x} - 1 = 0$

$\rightsquigarrow$ $e^{2x} = 2s \pm \sqrt{4s^2+1} \geq 0 \Rightarrow e^{2x} = 2s + \sqrt{4s^2+1}.$

$\therefore x = \frac{1}{2}\log(2s+\sqrt{4s^2+1}).$

$\rightsquigarrow$ $y = \frac{1}{2}\cosh(2x) = \frac{1}{2}\sqrt{1+\sinh^2(2x)} = \frac{1}{2}\sqrt{1+4s^2}$ 5점.

$\therefore \tilde{X}(s) = X(x) = \left(\frac{1}{2}\log(2s+\sqrt{4s^2+1}),\ \frac{1}{2}\sqrt{1+4s^2}\right).$

여기서 매개변수 s의 범위는.

$0 \leq x \leq 1 \rightsquigarrow 0 \leq \frac{1}{2}\sinh^{-1}(2s) \leq 1$

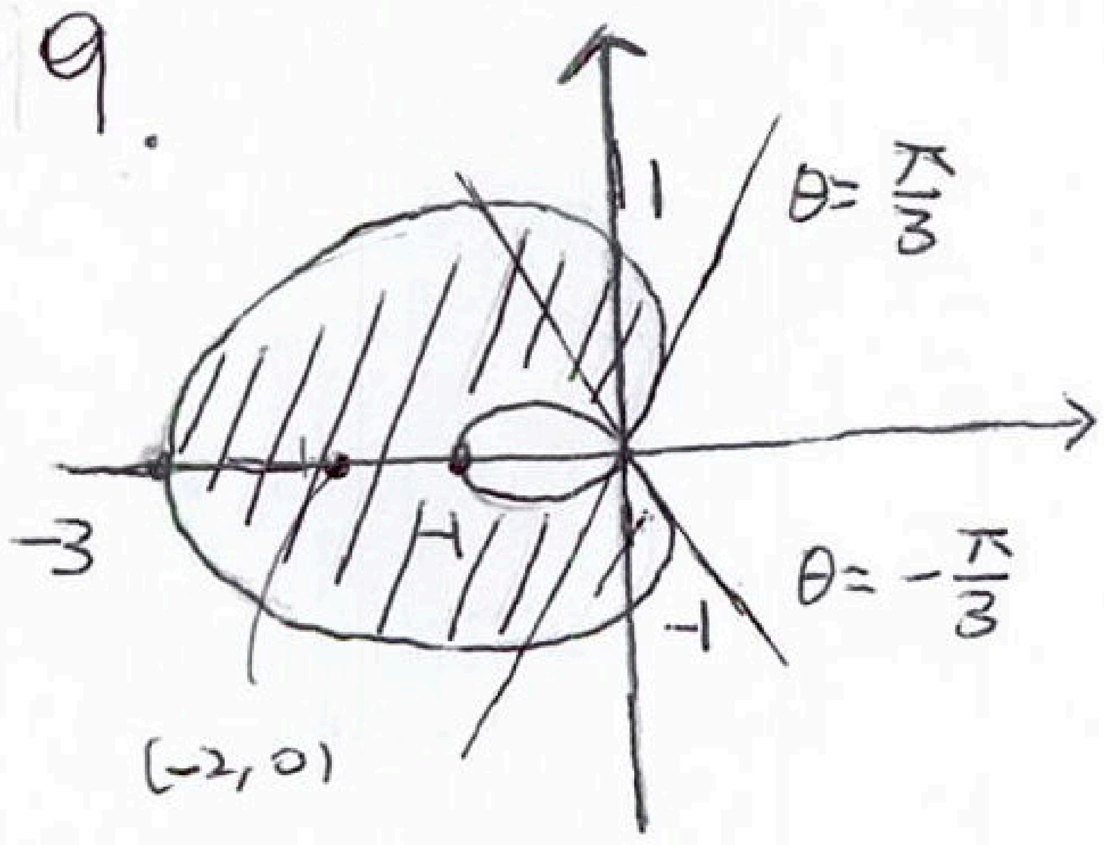
$\rightsquigarrow 0 \leq s \leq \frac{1}{2}\sinh 2$

$\rightsquigarrow 0 \leq s \leq \dfrac{e^2-e^{-2}}{4}$ 5점.

* 계산 실수가 있은 경우
그 이후의 흐름이 맞는경우
5점 감점.

, * $\tilde{X}(s) = \left(\frac{1}{2}\sinh^{-1}(2s),\ \frac{1}{2}\cosh\sinh^{-1}(2s)\right)$와 같은 꼴로 써도 인정.

9.



$$\text{Area } S = 2\times\left(\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{1}{2}r^2\, d\theta - \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}r^2\, d\theta\right)$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (1-2\cos\theta)^2\, d\theta - \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} (1-2\cos\theta)^2\, d\theta$$

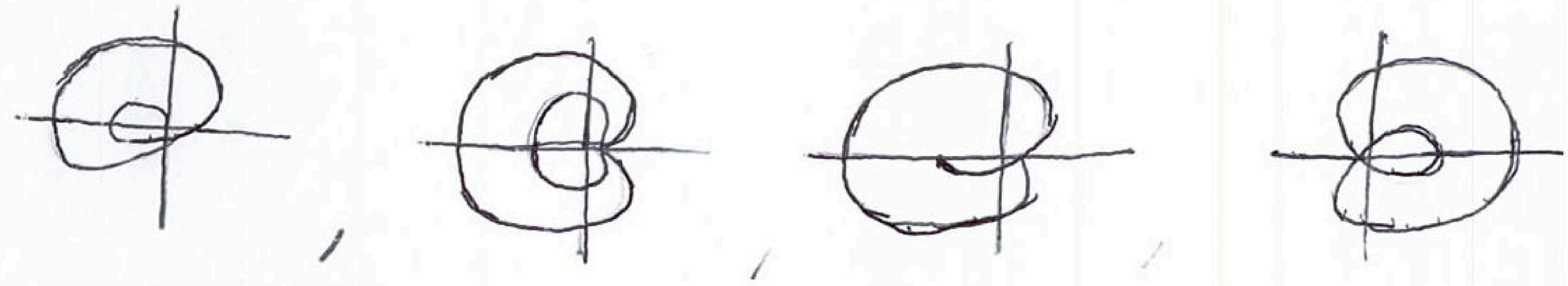
$$= \pi + 3\sqrt{3}$$

채점기준

그래프 개형이 맞으면 10점

비슷하나 정확하지 않으면 5점

ex)



식이 맞으면 5점

답까지 맞으면 10점