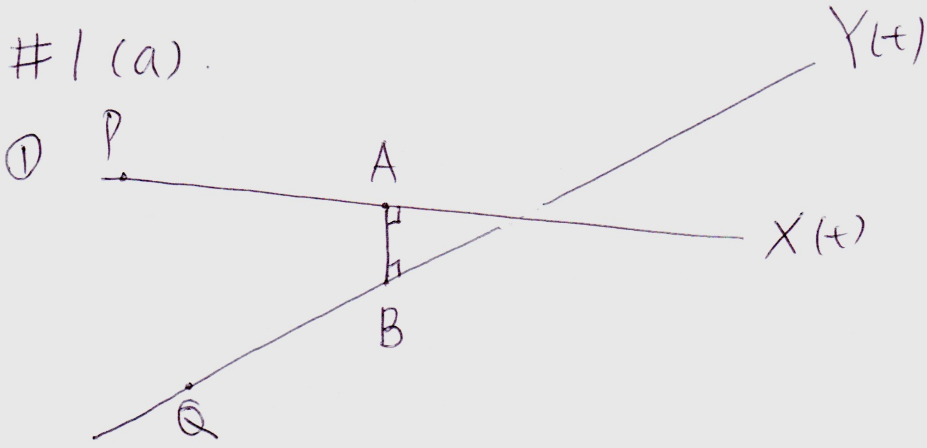
2012년 1학기
수학 및 연습 1
기말고사

#1 (a).

①



최단거리일때 직선 X, Y의 점을 각각 A, B 라 하자.

$\overrightarrow{AB}$는 $\mathbb{a}$와 $\mathbb{b}$에 모두 수직이므로 $\overrightarrow{AB} \parallel \mathbb{a}\times\mathbb{b}$ 이다. 5

이제 $\overrightarrow{AB}$는 $\overrightarrow{PB}$를 $\mathbb{a}\times\mathbb{b}$ 방향으로 정사영 시킨 것이므로 5

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PB}\cdot\frac{\mathbb{a}\times\mathbb{b}}{|\mathbb{a}\times\mathbb{b}|^2}(\mathbb{a}\times\mathbb{b}) = (\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QB})\cdot\frac{\mathbb{a}\times\mathbb{b}}{|\mathbb{a}\times\mathbb{b}|^2}(\mathbb{a}\times\mathbb{b})$$

$$= \frac{\overrightarrow{PQ}\cdot(\mathbb{a}\times\mathbb{b})}{|\mathbb{a}\times\mathbb{b}|^2}(\mathbb{a}\times\mathbb{b})$$

$$\therefore |\overrightarrow{AB}| = \frac{|(Q-P)\cdot(\mathbb{a}\times\mathbb{b})|}{|\mathbb{a}\times\mathbb{b}|}$$ 5

② 최단거리일때의 점을 각각 $t_0\mathbb{a}+P$, $t_1\mathbb{b}+Q$ 라 하자.

위 풀이에서 보듯 $t_0\mathbb{a}+P-(t_1\mathbb{b}+Q) \parallel \mathbb{a}\times\mathbb{b}$ 이므로

$t_0\mathbb{a}-t_1\mathbb{b}+(P-Q) = k(\mathbb{a}\times\mathbb{b})$ 라 둘수있다.

양변에 $\mathbb{a}\times\mathbb{b}$를 내적하면 외적의 성질에 의해

$$|(P-Q)\cdot(\mathbb{a}\times\mathbb{b})| = k|\mathbb{a}\times\mathbb{b}|^2$$

$$\therefore 거리 = k|\mathbb{a}\times\mathbb{b}| = \frac{|(Q-P)\cdot(\mathbb{a}\times\mathbb{b})|}{|\mathbb{a}\times\mathbb{b}|}$$

※ $t_0=t_1$ 이라 가정한 경우 5점 감점

#1. (b) $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{-1}$ 을 $X(t)$라고 놓고,

$x-3 = \dfrac{y-1}{4} = -z-1$ 을 $Y(t)$ 라고 놓으면

$X(t) = (-1, 1, 0) + t(2, -1, -1)$

$Y(t) = (3, 1, -1) + t(1, 4, -1)$.

∴ 문제 #1-(a)에서 $P = (-1, 1, 0)$, $Q = (3, 1, -1)$ 인 경우이므로

$a = (2, -1, -1)$, $b = (1, 4, -1)$

$Q - P = (4, 0, -1)$, $a \times b = (5, 1, 9)$

$$\therefore d = \frac{|(Q-P)\cdot(a\times b)|}{|a\times b|} = \frac{|20-9|}{\sqrt{25+1+81}} = \frac{11}{\sqrt{107}}$$

* 채점기준 *

i) $a\times b$를 계산해서 명시한 경우

- $a\times b$값이 틀리면 0점.
- $a\times b$값이 맞고 d값이 맞으면 10점.
- $a\times b$값이 맞고 d값이 틀리면 5점.

ii) $a\times b$를 따로 명시하지 않은경우

- d값이 맞으면 10점.
- d값이 틀리면 0점.

#2

(a) 직선의 방정식을 구해보면,

$X(t) = (3t + x_1,\ 2t + x_2,\ t + x_3)$

xy-평면과 만나는 점은, $z = t + x_3 = 0$ 에서 $t = -x_3$ 이므로,

$(x_1 - 3x_3,\ x_2 - 2x_3,\ 0)$ 이다.

따라서 $T(x, y, z) = (x - 3z,\ y - 2z,\ 0)$ 이다. 10

※ T의 식을 잘못구했더라도 직선의 방정식을 맞게 구했으면 부분점수 5점 부여.

(b) $T((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) = T(x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2)$

$= (x_1 + x_2 - 3(z_1 + z_2),\ y_1 + y_2 - 2(z_1 + z_2),\ 0)$

$= ((x_1 - 3z_1) + (x_2 - 3z_2),\ (y_1 - 2z_1) + (y_2 - 2z_2),\ 0)$

$= (x_1 - 3z_1,\ y_1 - 2z_1,\ 0) + (x_2 - 3z_2,\ y_2 - 2z_2,\ 0)$

$= T(x_1, y_1, z_1) + T(x_2, y_2, z_2)$.

마찬가지로, $T(k(x, y, z)) = kT(x, y, z)$ 임을 보일수 있다.

⇒ T는 선형사상. 5

$T(e_1) = (1, 0, 0)$, $T(e_2) = (0, 1, 0)$, $T(e_3) = (-3, -2, 0)$ 에서

대응되는 행렬은 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 5

※ (a)에서 T의 식을 잘못구하면, 선형사상임을 보이는 부분에 대해서만 5점부여 (행렬에 대한 점수는 없음).

3. (a)

$$\det(A) = 2(x+1)(x-1)\det\begin{pmatrix} x+1 & -1 & -1 \\ 1 & -(x+1) & 1 \\ 1 & 1 & -(x+1) \end{pmatrix}$$

$$= 2(x+1)(x-1)^2(x+2)^2$$

$$\det(A^{2012}) = 0 \iff \det(A)^{2012} = 0$$

$$\therefore \quad x = -1, 1, -2.$$

<채점기준>

- det(A) 를 정확히 계산하지 않은 경우 -5점.

3. (b)

$$\det(B) = \det(B^t) = \det(-B) = (-1)^5 \det(B)$$

$$\Rightarrow \quad 2\det(B) = 0$$

$$\therefore \quad \det(B) = 0$$

<채점기준 >

- 부분점수 없음.

#4.

$$X(t) = r(t)(\cos t, \sin t) \Rightarrow |X(t)| = |r(t)| = r(t) \quad (\because r(t) > 0)$$

$$X'(t) = r'(t)(\cos t, \sin t) + r(t)(-\sin t, \cos t)$$

$$= (r'(t)\cos t + (-r(t)\sin t, \; r'(t)\sin t + r(t)\cos t)$$

$$\Rightarrow |X'(t)| = \sqrt{r(t)^2 + r'(t)^2}$$

$$X(t) \cdot X'(t) = |X(t)| \cdot |X'(t)| \cdot \cos\alpha$$

$$= r(t) \cdot \sqrt{r(t)^2 + r'(t)^2} \cdot \cos\alpha$$

$$= (r(t)\cos t, \; r(t)\sin t) \cdot (r'(t)\cos t - r(t)\sin t, \; r'(t)\sin t + r(t)\cos t))$$

$$= r(t) \cdot r'(t)$$

$$\Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{r'(t)}{\sqrt{r(t)^2 + r'(t)^2}} \quad \cdots \; *)$$

계산 실수 없이
*) 식 구하면 +5점.

$$(r(t)^2 + r'(t)^2)\cos^2\alpha = r'(t)^2$$

$$r(t)^2 \cos^2\alpha = r'(t)^2 \cdot \sin^2\alpha$$

$$\left.\begin{array}{l} r(t) \neq 0 \\ \sin\alpha \neq 0 \\ (\because \; 0 < \alpha < \pi) \end{array}\right) \Rightarrow \left(\frac{r'(t)}{r(t)}\right)^2 = \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$$

$$\frac{r'(t)}{r(t)} = \pm \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

*) 에서 $r'(t)$ 와 $\cos\alpha$ 의 부호가 같고 $r(t), \sin\alpha > 0$ 이므로

$$\frac{r'(t)}{r(t)} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = k$$

2

$\frac{r'(t)}{r(t)} = k$ 를 t에 대해 적분하면

$$\int \frac{r'(t)}{r(t)}\,dt = \log r(t) = kt + C \quad (\because r(t) > 0)$$

$r(t) = e^{kt+c} = a \cdot e^{kt}$ 꼴로 표현된다. ③

② $\frac{r'(t)}{r(t)} = \cot\alpha = \text{constant}$ 의 식을 얻으면 +10점.

그 과정에서의 사소한 계산실수, 논리적 오류 (ex. $r'(t)=0$ 인 경우 고려 없이 나눈 경우, 충분한 언급없이 $\frac{r'(t)}{r(t)} = \pm\cot\alpha$ 에서 − 인 경우를 제외한 경우 등)가 있는 경우 −5점.

사소한 실수·오류가 여러 번 발견되는 경우, 중대한 오류가 있는 경우 0점.

③ 적분하여 푸는 경우 +5점.
미분방정식의 해의 유일성을 이용, 대입하여 푸는 경우 0점.

※. $\cos\alpha = \frac{r'(t)}{\sqrt{r(t)^2 + r'(t)^2}}$ 의 양변을 미분하여 푸는 경우.

$r'(t)$의 미분 가능성에 대한 언급이 없으면 인정 안함.

. 외적의 성질을 사용하는 경우. 평면벡터로 보지 않는 경우 인정 안함.

#5. (a) t를 $g(s)$로 재매개화 한 곡선을 $\tilde{X}$라 두자.

$\Rightarrow \tilde{X}(s) = X(g(s))$

$\therefore \tilde{X}'(s) = X'(g(s))\, g'(s)$

$\tilde{X}''(s) = X''(g(s))\, g'(s)^2 + X'(g(s))\, g''(s)$

$\Rightarrow \tilde{X}'(s) \times \tilde{X}''(s) = (g'(s))^3\, X'(g(s)) \times X''(g(s))$ — 5점

$= (g'(s))^3\, X'(t) \times X''(t) \neq 0$

($\because$ 재매개화 조건에 의하여 $g'(s) \neq 0$ 이고,

$X'(t)$와 $X''(t)$가 일차독립이므로 $X'(t) \times X''(t) \neq 0$

$\therefore \tilde{X}'$ 와 $\tilde{X}''$ 는 일차독립

— 10점

(b) $t = t_0$일때 접촉평면의 방정식 : $((x, y, z) - X(t_0)) \cdot (X'(t_0) \times X''(t_0)) = 0$ — 3점

#5(a)에 의해서 $\tilde{X}'(s) \times \tilde{X}''(s) = g'(s)^3\, X'(t) \times X''(t) \mathbin{/\!/} X'(t) \times X''(t)$

이므로, 재매개화 하여도 접촉평면의 법선벡터는 $X(t_0)$에서의 접촉평면의 법선벡터와 방향이 일치한다.

$\therefore$ 법선벡터의 방향이 일치하고, 지나는 기준점이 같으므로

$X(t)$의 접촉평면을 재매개화 하여도 변하지 않는다.

— 10점

※ 채점기준 ※

1. (a)에서 $a\tilde{X}' + b\tilde{X}'' = 0$ 임을 가정하고 $a = b = 0$ 이라는 결론으로 부터 일차독립임을 보일 때에는 $a = b = 0$ 인 이유를 명확하게 적어야 인정.

2. $\tilde{X}'$ 이나 $\tilde{X}''$을 틀리면 (a) 부분점수 없음

3. 특정한 매개화를 한경우 (호의길이 등등..) 0점

4. (b)에서 정의는 틀렸으나, 풀이과정이 맞으면 −3점

5.(c) · $\frac{d}{dt}(X'\cdot X') = 2X'\cdot X''$ 이므로, $\frac{d}{dt}|X'| = \frac{d}{dt}\sqrt{X'\cdot X'} = \frac{1}{2\sqrt{X'\cdot X'}}\frac{d}{dt}(X'\cdot X') = \frac{X'\cdot X''}{|X'|}.$

· $$\left(\frac{X'}{|X'|}\right)' = \frac{X''|X'| - |X'|'X'}{|X'|^2} = \frac{X''|X'| - \left(\frac{X'\cdot X''}{|X'|}\right)X'}{|X'|^2} = \frac{|X'|^2X'' - (X'\cdot X'')X'}{|X'|^3}.$$

풀이 1) 분모의 크기 제곱을 계산하면

$$\begin{aligned}\left||X'|^2X'' - (X'\cdot X'')X'\right|^2 &= |X'|^4|X''|^2 - 2|X'|^2(X'\cdot X'')^2 + (X'\cdot X'')^2|X'|^2\\ &= |X'|^4|X''|^2 - |X'|^2(X'\cdot X'')^2\\ &= |X'|^2(|X'|^2|X''|^2 - (X'\cdot X'')^2)\\ &= |X'|^2|X'\times X''|^2.\end{aligned}$$

단, 여기서 $|a|^2|b|^2 = (a\cdot b)^2 + |a\times b|^2$ 가 사용되었다. 따라서

$$\left|\left(\frac{X'}{|X'|}\right)'\right| = \frac{\left||X'|^2X'' - (X'\cdot X'')X'\right|}{|X'|^3} = \frac{|X'||X'\times X''|}{|X'|^3} = \frac{|X'\times X''|}{|X'|^2}. \quad ////$$

풀이2) 분모를 살펴보면, $(a\cdot c)b - (a\cdot b)c = a\times(b\times c)$ 공식으로부터

$$|X'|^2X'' - (X'\cdot X'')X' = (X'\cdot X')X'' - (X'\cdot X'')X' = X'\times(X''\times X')$$

가 성립한다. 그리고 X' 와 $X'\times X''$ 는 서로 수직이므로,

$$\left||X'|^2X'' - (X'\cdot X'')X'\right| = |X'\times(X''\times X')| = |X'||X''\times X'|\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = |X'||X''\times X'|$$

이다. 따라서

$$\left|\left(\frac{X'}{|X'|}\right)'\right| = \frac{\left||X'|^2X'' - (X'\cdot X'')X'\right|}{|X'|^3} = \frac{|X'||X'\times X''|}{|X'|^3} = \frac{|X'\times X''|}{|X'|^2}. \quad ////$$

※ 채점기준 : · 논리 전개가 불완전하면 0점.

· 중대한 표기법 오류가 있으면 −5점

5. (d) 곡률 $\kappa(t)$ 는

$$\kappa(t) = \frac{1}{|X'|}\left|\left(\frac{X'}{|X'|}\right)'\right| = \frac{1}{|X'|}\cdot\frac{|X'\times X''|}{|X'|^2} = \frac{|X'\times X''|}{|X'|^3}$$

이므로,

$$\tilde{\kappa}(t) = \frac{|Y'\times Y''|}{|Y'|^3} = \frac{|(cX')\times(cX'')|}{|cX'|^3} = \frac{1}{c}\frac{|X'\times X''|}{|X'|^3} = \frac{1}{c}\kappa(t). \quad ////$$

※ 채점기준 : · 곡률 정의를 틀리면 0점, 단 곡률과 곡률벡터를 혼동하면 −5점

· 유도과정 없이 기하학적 직관으로 답을 내면 −5 점.

· 결론이 잘못되었으면 −5점.

6. (a)

i) 5.(c)를 이용한 풀이

$X(t)$를 $z=0$인 (xy 평면상의) 3차원 공간의 곡선으로 생각하자.

$X(t) = (t,\ at^2,\ 0)$ 이라 하면 5.(c)에 의해 $\kappa(t) = \dfrac{|X'(t) \times X''(t)|}{|X'(t)|^3}$ 이다.

$X'(t) = (1,\ 2at,\ 0)$, $X''(t) = (0,\ 2a,\ 0)$

$X'(t) \times X''(t) = (0,\ 0,\ 2a)$, $|X'(t) \times X''(t)| = |2a| = 2a$ $(\because a>0)$

$|X'(t)| = \sqrt{1+4a^2t^2}$ 이므로

$$\therefore\ \kappa(t) = \frac{2a}{(1+4a^2t^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

ii) 정의를 이용한 풀이

곡률벡터 $\mathbb{K}(t) = \dfrac{1}{|X'(t)|}\left(\dfrac{X'(t)}{|X'(t)|}\right)'$ 임을 이용하자.

$$\mathbb{K}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+4a^2t^2}}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{1+4a^2t^2}}\right)',\ \left(\frac{2at}{\sqrt{1+4a^2t^2}}\right)'\right)$$

$$= \cdots\cdots = \frac{2a}{(1+4a^2t^2)^2}(-2at,\ 1) \text{ 이다.}$$

$$\therefore\ \kappa(t) = |\mathbb{K}(t)| = \frac{2a}{(1+4a^2t^2)^2}\cdot\sqrt{1+4a^2t^2} = \frac{2a}{(1+4a^2t^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

* 채점기준

① 연습문제에 있는 다른 공식들을 이용한 풀이도 인정

② 5.(c)를 이용할 때 3차원 공간에 대한 언급이 없을시 −5점

③ 답을 틀렸을 시 무조건 0점

③' 그러나 정의를 정확히 썼을 경우 2점

6-(b). (a)에서 곡률 $k(t) = \frac{2a}{(1+4a^2t^2)^{3/2}}$ 이므로

$$\int_X k\, ds = \int_{-1}^{1} k(t)\,|X'(t)|\,dt \qquad // \ (5점)$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{2a}{(1+4a^2t^2)^{3/2}} (1+4a^2t^2)^{1/2}\, dt$$

$$= 2\int_0^1 \frac{2a}{(1+4a^2t^2)}\, dt$$

$t=\frac{1}{2a}\tan\theta$ 로 치환

$$= 2\int_0^{\arctan(2a)} \frac{2a}{\sec^2\theta}\cdot\frac{1}{2a}\sec^2\theta\, d\theta$$

$$= 2\arctan(2a)$$

// (10점)

(채점기준)

- 선적분의 정의를 정확히 표현하면 (a)의 정답여부와 상관없이 5점 부여
- 적분의 범위를 명시하지 않고 부정적분으로 구한경우 0점
- 곡률 대신 곡률벡터를 넣어 계산한 경우 0점
- $t=\frac{1}{2a}\tan\theta$ 의 치환대신 $t=\frac{1}{2a}\sinh x$ 의 치환을 사용한경우 계산과정이 정확하지 않으면 5점.
- $\int_{-1}^{1} \frac{2a}{1+4a^2t^2}\,dt = \int_{\theta_0}^{\theta_1} d\theta = \theta_1-\theta_0$ 라고 쓴 후

$$\tan(\theta_1-\theta_0) = \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_0}{1+\tan\theta_1\tan\theta_0} = \frac{4a}{1+(2a)\cdot(-2a)} = \frac{4a}{1-4a^2}$$

으로 답을 $\arctan\left(\frac{4a}{1-4a^2}\right)$ 라고 쓴 경우 계산과정에 해당하는 점수 없음.

6.(c)

①

$$\vec{K}(t) = \frac{1}{|x'(t)|} \cdot \left(\frac{x'(t)}{|x'(t)|} \right)'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+4a^2t^2}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1+4a^2t^2}}, \frac{2at}{\sqrt{1+4a^2t^2}} \right)'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+4a^2t^2}} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{+8a^2t}{(\sqrt{1+4a^2t^2})^3}, \frac{2a}{\sqrt{4a^2t^2+1}} - \frac{1}{2} \frac{2at \cdot 8a^2t}{(\sqrt{1+4a^2t^2})^3} \right)$$

$$= \left(\frac{-4a^2t}{(\sqrt{1+4a^2t^2})^4}, \frac{2a}{(\sqrt{1+4a^2t^2})^4} \right)$$ ···· 각 성분마다 5점. 부분점수 없음.

② 곡률벡터의 방향은 접선벡터의 방향과 수직이므로

곡률벡터의 방향은 $(-2at, 1)$. 크기는 6.(a)의 결과에 의해 $\frac{2a}{(1+4a^2t^2)^{\frac{3}{2}}}$ 이 되어야 하므로 $\therefore \frac{2a}{(1+4a^2t^2)^2} \cdot (-2at, 1)$ ··· 방향이 바뀌었을 경우 5점감점.

* 답이 평면좌표계로 표현되지 않았을 경우 2점 감점.

* 미분만 하고 계산 정리를 안했을 경우 5점 감점.

7.(a) $X(t) = (t\cos t,\ t\sin t,\ t) \quad (-\pi \le t \le \pi)$

☆ $X'(t) = (\cos t - t\sin t,\ \sin t + t\cos t,\ 1)$

$X''(t) = (-2\sin t - t\cos t,\ 2\cos t - t\sin t,\ 0)$

$\Rightarrow X'(\frac{\pi}{2}) = (-\frac{\pi}{2}, 1, 1), \quad X''(\frac{\pi}{2}) = (-2, -\frac{\pi}{2}, 0)$ 5점

구하고자 하는 직선의 방향벡터는 접촉평면의 법선벡터 $X'(\frac{\pi}{2}) \times X''(\frac{\pi}{2})$ 와 같다.

$X'(\frac{\pi}{2}) \times X''(\frac{\pi}{2}) = (-\frac{\pi}{2}, 1, 1) \times (-2, -\frac{\pi}{2}, 0) = (\frac{\pi}{2}, -2, \frac{\pi^2}{4}+2)$ 8점

$\therefore$ 직선의 방정식 $= X(\frac{\pi}{2}) + t(\frac{\pi}{2}, -2, \frac{\pi^2}{4}+2)$

$= (0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + t(\frac{\pi}{2}, -2, \frac{\pi^2}{4}+2) \quad (t \in \mathbb{R})$

또는 $\dfrac{x}{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{y-\frac{\pi}{2}}{-2} = \dfrac{z-\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi^2}{4}+2}$ 10점

[채점기준] • ☆의 내용없이 바로 아래 쓰면 점수없음.

• 5, 8, 10점 이외에 부분점수 없음.

문제 7 (b).

질량을 m 이라 하면, $|X'(t)| = \sqrt{2+t^2}$ 이므로,

$$m = \int_X \mu\, ds$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{t\sin t}{\sqrt{2+t^2}} \cdot \sqrt{2+t^2}\, dt.$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} t\sin t\, dt = \left[-t\cos t\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} -\cos t\, dt$$

$$= 2\pi. \qquad \text{이고,}$$

곡선의 질량중심을 $\tilde{X} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 라 하면,

$\bar{x} = \frac{1}{m}\int_X x\cdot\mu\cdot ds$, $\bar{y} = \frac{1}{m}\int_X y\cdot\mu\, ds$, $\bar{z} = \frac{1}{m}\int_X z\cdot\mu\, ds$ 이므로,

$$\bar{x} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\cos t \cdot \frac{t\sin t}{\sqrt{2+t^2}} \cdot \sqrt{2+t^2}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\cos t\sin t\, dt = 0$$

($t^2\cos t\sin t$ 가 기함수 이므로)

$$\bar{y} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin t \cdot \frac{t\sin t}{\sqrt{2+t^2}}\sqrt{2+t^2}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\sin^2 t\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{t^2(1-\cos 2t)}{2}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} t^2 - t^2\cos t\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{3}\pi^3 - \left[\frac{1}{2}t^2\sin 2t\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} t\sin 2t\, dt\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{3}\pi^3 - \frac{\pi}{2} + \left[\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\pi}\right)$$

$$= \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4}.$$

(t²sint 가 기함수 이므로)

$$\bar{z} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\cdot\frac{t\sin t}{\sqrt{2+t^2}}\sqrt{2+t^2}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\sin t = 0$$

따라서 질량중심은 $\left(0, \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4}, 0\right)$.

• 채점기준.

질량을 정확히 구하였을 경우 → 5점. (식이 정확해도 결과가 틀리면 0점).

• $\bar{x}$, $\bar{z}$ 를 t에 관한 식으로 정확히 치환후 계산하였을 경우 → 5점.

(하나만 맞으면 3점).

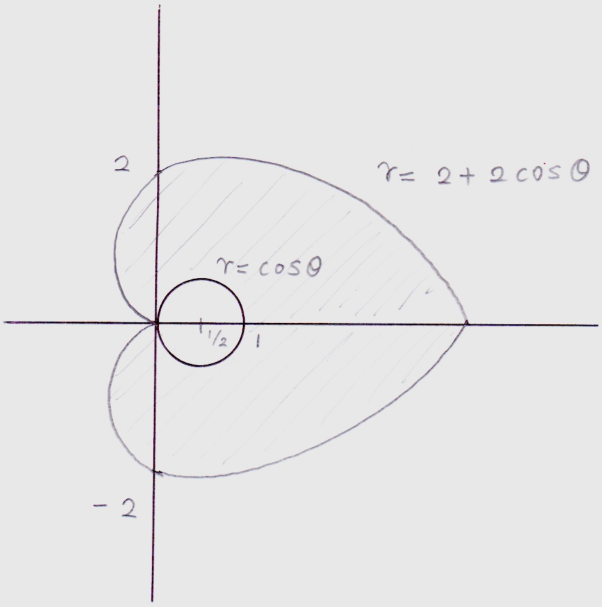
• $\bar{y}$의 식을 정확히 유도 → 5점.

〃 정확히 계산 → 5점

• $\bar{x}$, $\bar{z}$의 계산에서 질량을 나누지 않아도 적분결과가 0이 나왔으면 감점없음.

• 잘못된 식을 적었을 경우 (ex) 길이를 나누거나 할 경우) 0점 (5점 감점).

8.



$r = 2+2\cos\theta$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 A

$r = \cos\theta$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 B 라 하면

구하려는 부분의 넓이는 $A - B$

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(2+2\cos\theta)^2\,d\theta = 2\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)^2\,d\theta$$

$$= 2\int_0^{2\pi}(1+\cos^2\theta + 2\cos\theta)\,d\theta$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\left(1+\frac{1+\cos2\theta}{2}+2\cos\theta\right)d\theta$$

$$= 2\left[\frac{3}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin2\theta + 2\sin\theta\right]_0^{2\pi} = 6\pi$$

$$B = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\cos^2\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin2\theta\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{4}$$

(or $r = \cos\theta$, $r^2 = r\cos\theta$, $\Rightarrow (x-\frac{1}{2})^2 + y^2 = (\frac{1}{2})^2$

반지름이 $\frac{1}{2}$ 인 원이므로 넓이는 $\frac{\pi}{4}$)

$\therefore$ 구하려는 부분의 넓이는 $\frac{23}{4}\pi$ $\left(= 6\pi - \frac{\pi}{4}\right)$

<채점기준> ① A에 대한 식을 맞게 구하면 +5점

② B에 대한 식을 맞게 구하면 +5점

③ 답을 맞게 구하면 +5점