

< 2013년 1학기 수학 및 연습 1 기말고사 보범답안 >

1. (a)  $l: x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$  이므로  $l$  위의 점은

$(t, 2t, 3t)$  형태이다.  $P_l(x)$  는  $l$  이 점 중  $x$  와 가장 가까운 점 즉  $\overline{P_l(x) \times l} \perp l$  인 점이므로

$$\begin{aligned} 0 &= (x-t, y-2t, z-3t) \cdot (1, 2, 3) \\ &= x+2y+3z-14t \quad t = \frac{x+2y+3z}{14} \end{aligned}$$

따라서,  $P_l(x) = \left( \frac{x+2y+3z}{14}, \frac{2x+4y+6z}{14}, \frac{3x+6y+9z}{14} \right)$

$$= \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\therefore A = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

(b)  $m: x = \frac{y}{2} = \frac{z-4}{3}$  이므로

$P_m(x) = (t, 2t, 3t+4)$  로 두고 (a) 와 같이 풀면

$$\begin{aligned} 0 &= (x-t, y-2t, z-3t-4) \cdot (1, 2, 3) \\ &= x+2y+3z-12-14t \quad t = \frac{x+2y+3z-12}{14} \end{aligned}$$

따라서,  $P_m(x) = \left( \frac{x+2y+3z-12}{14}, \frac{2(x+2y+3z-12)}{14}, \frac{3(x+2y+3z-12)}{14} + 4 \right)$  ┘ + 5점

$$= \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$\therefore b = -\frac{1}{14} \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ -10 \end{pmatrix} \quad \text{┘ + 15점}$$

채점 기준

(a) 답이 맞으면 10점

답이 틀렸으나 정사영 공식이 맞으면 5점

#2.

$$(i) \quad X, Y \in M$$

$$T(X+Y) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} (X+Y)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} Y$$

$$= T(X) + T(Y) \quad \text{+5}$$

$$(ii) \quad c \in \mathbb{R}, \quad X \in M$$

$$T(cX) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} (cX) = c \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = cT(X) \quad \text{+5}$$

(i), (ii)에 의해  $T$ 는 선형사상이다.

$$T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\therefore T_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{+10 (부분점수 없음)}$$

#3. 풀이1) (제3변의 행렬) =  $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 5 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$  이므로,  
 $\downarrow +15$

$\det(AB) = \det A \det B$  에 의해.

$$\text{(제3변)} = \det \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 5 & 0 & 8 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$


---

$\downarrow +15$   
 $\therefore t = 221$

풀이2)  $A = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $B = (b_1, b_2, b_3)$ ,  $C = (c_1, c_2, c_3)$  라 두면,  $\det$  는 행에 대하여 선형사상이므로,

$$\det \begin{pmatrix} 3A+5B \\ 4B+5C \\ 8C+5A \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 3A \\ 4B+5C \\ 8C+5A \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 5B \\ 4B+5C \\ 8C+5A \end{pmatrix}$$

같은 행이 있는 행렬의  $\det$  는 0

$$= \det \begin{pmatrix} 3A \\ 4B \\ 8C \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 5B \\ 5C \\ 5A \end{pmatrix} = 3 \cdot 4 \cdot 8 \cdot \det \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} + 5^3 \det \begin{pmatrix} B \\ C \\ A \end{pmatrix}$$

$\downarrow +10$

$$= 96 \det \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} + 125 \det \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$$

$$= 221 \det \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$$

$\downarrow +10$

참고) ① 풀이2) 에서  $\det \begin{pmatrix} 3A+5B \\ 4B+5C \\ 8C+5A \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 3A \\ 4B \\ 8C \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 5B \\ 5C \\ 5A \end{pmatrix}$  를 이유없이 바로 쓴 경우 0점.

("행렬식은 선형사상이다" 도 0점)

② 가우스 소거법을 이용한 경우 답 맞으면 20점, 틀리면 0점.

#4. (a)

$$\vec{L}_1 = (2, 3, 2) - (1, 1, 3) = (1, 2, -1)$$

$$\vec{L}_2 = (0, 2, 5) - (1, 1, 3) = (-1, 1, 2)$$

$$\vec{L}_1 \times \vec{L}_2 = (5, -1, 3)$$

└ 5점

평면이  $(1, 1, 3)$ 을 지나므로 평면의 방정식은

$$5(x-1) - (y-1) + 3(z-3) = 0$$

$$5x - y + 3z = 13.$$

└ 5점

(b)

$\vec{L}_1, \vec{L}_2$ 로 이루어진 평행사변형의 넓이

$$= |\vec{L}_1 \times \vec{L}_2| = |(5, -1, 3)| = \sqrt{35}$$

└ 5점

두 평면이 이루는 각은 두 법선벡터가 이루는 각과 같으므로,  $L_1, L_2$ 로 이루어진 평면과 평면  $3x - 5y + z = 1$ 가 이루는 각을  $\theta$ 라 하면,

$$\cos \theta = \frac{(5, -1, 3) \cdot (3, -5, 1)}{\sqrt{5^2 + 1^2 + 3^2} \cdot \sqrt{3^2 + 5^2 + 1^2}} = \frac{23}{35}$$

그러므로 정사영시켜 얻은 넓이는

$$\sqrt{35} \times \cos \theta = \frac{23\sqrt{35}}{35}$$

└ 5점

(b) (별해)

$\vec{L}_1$  을  $3x - 5y + z = 1$  평면에 정사영시킨 벡터를  $\vec{\tilde{L}}_1$  라 하면,

$$\vec{\tilde{L}}_1 = (1, 2, -1) - \frac{(3, -5, 1) \cdot (1, 2, -1)}{(3, -5, 1) \cdot (3, -5, 1)} (3, -5, 1)$$

$$= \frac{1}{35} (59, 30, -27)$$

└ 3점

마찬가지로

$$\vec{\tilde{L}}_2 = \frac{1}{35} (-17, 5, 16)$$

└ 5점

따라서 정사영시킨 넓이는

$$\begin{aligned} |\vec{\tilde{L}}_1 \times \vec{\tilde{L}}_2| &= \left| \frac{1}{35} (69, -15, 23) \right| \\ &= \frac{23\sqrt{35}}{35} \end{aligned}$$

└ 5점

\* 점을 정사영시켜 푼 경우 별해와 같은 기준으로 채점.

\* 계산을 끝까지 하지 않은 경우, 계산실수 3점 감점.

5번

$$\begin{aligned} \text{Step 1. } X(t) &= (t, t^2, t^3) \\ X'(t) &= (1, 2t, 3t^2) \\ X''(t) &= (0, 2, 6t) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} X(t) \\ X'(t) \\ X''(t) \end{aligned}} \right\} \quad 5\text{점}$$

Step 2.  $X(t), X'(t), X''(t)$  가 일차독립임을 보이자. ... 15점

(방법 1) 벡터  $X(t), X'(t), X''(t)$  이 일차독립  
 $\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} X(t) & X'(t) & X''(t) \end{pmatrix} \neq 0$  를 이용.

$$\det \begin{pmatrix} t & 1 & 0 \\ t^2 & 2t & 2 \\ t^3 & 3t^2 & 6t \end{pmatrix} = 2t^3, \quad t > 0 \text{ 일때 } 2t^3 \neq 0 \text{ 이므로}$$

$X(t), X'(t), X''(t)$  는 일차독립이다.

(방법 2)  $aX(t) + bX'(t) + cX''(t) = 0$  임을 가정하자.

$$a(t, t^2, t^3) + b(1, 2t, 3t^2) + c(0, 2, 6t) = 0 \text{ 이므로}$$

$$\begin{cases} at + b = 0 & \textcircled{1} \\ at^2 + 2bt + 2c = 0 & \textcircled{2} \\ at^3 + 3bt^2 + 6ct = 0 & \textcircled{3} \end{cases}$$

} (\*)

$t > 0$  이므로 식② - 식①  $\times t$  을 계산하면  $bt + 2c = 0$  을,

식③ - 식②  $\times t$  을 계산하면,  $bt^2 + 4ct = 0$  을 얻는다.

두식을 연립하면  $2ct = 0$ , 이때,  $t > 0$  이므로  $c = 0$  이고, 따라서  $b = 0, a = 0$  이 된다.  $\therefore X, X', X''$  는 각  $t$  에서 일차독립이다.

(채점기준) \* Step 1을 틀리면 부분점수 없음. (전체 0점)

\* Step 2. (방법 1)에서 행렬식 계산을 들린 경우 5점

(방법 2)에서 (\*)를 틀린 경우, 10점감점 (이후 풀이에 대한 부분점수 없음)

$a=b=c=0$  을 보이는 풀이과정에서 실수가 있는 경우 5점 감점

(예: 임의의  $t$  에 대해 성립해야 하므로  $at+b=0 \Rightarrow a=b=0$ . < 들린 풀이 >)

★ (방법 2)에서 일차독립에 관한 명제만 쓰고 풀이과정이 없는 경우, step 2에 대한 점수 없음

\* 일차독립임을 가정하고, 모순을 보이는 풀이에서

$X = aX' + bX''$  인 경우에 대해서만 모순을 보인 경우. 감점 5점

\* 임의의 두쌍의 벡터가 서로 일차독립임을 보이는 풀이

=> 문제에 애매한 표현 ("서로 일차독립임을 보이시오.") 이 있어  
풀이과정에서 오류가 없는 경우, 만점 처리

(단, 이와 같이 풀더라도, 잘못된 결론 (예: 따라서  $X(t), X'(t), X''(t)$ 는  
일차독립이다.) 을 언급한 경우는 제외)

6.  $t = \pi$  에서의 접촉평면의 방정식 ;  $X = (x, y, z)$

$$(X'(\pi) \times X''(\pi)) \cdot (X - X(\pi)) = 0$$

$$\text{or } \det(X'(\pi), X''(\pi), X - X(\pi)) = \det(X - X(\pi), X'(\pi), X''(\pi)) = 0 \dots \textcircled{1}$$

$$X'(t) = (-2\sin t - 3\sin 2t, 2\cos t + 3\cos 2t, 1)$$

$$X''(t) = (-2\cos t - 6\cos 2t, -2\sin t - 6\sin 2t, 0) \text{ 에서}$$

$$X(\pi) = (1, 0, \pi), \quad X'(\pi) = (0, 1, 1), \quad X''(\pi) = (-4, 0, 0) \text{ 이므로 } \dots \textcircled{2}$$

접촉평면의 법선벡터는

$$X'(\pi) \times X''(\pi) = (0, 1, 1) \times (-4, 0, 0)$$

$$= (0, -4, 4) \text{ 이다.}$$

따라서, 접촉평면의 방정식은

$$(0, -4, 4) \cdot (x-1, y, z-\pi) = 0$$

$$-4y + 4(z-\pi) = 0$$

$$-y + z - \pi = 0 \text{ 이다. } \dots \textcircled{3}$$

(i) ① 에 해당하는 언급이나 풀이가 있으면 +5점

(ii) ② 에서  $X'(\pi)$  와  $X''(\pi)$  : 각 +5점

둘 중 틀린 것이 있으면 이후 계산은 틀린 걸로 간주

(iii) ③ 에서 마지막까지 풀이가 모두 맞으면 +5점

(iv)  $aX'(\pi) + bX''(\pi) + X(\pi)$ , ( $a, b$ : 실수) 는 접촉평면의 방정식이 아닙니다.



7. a) 곡선  $\gamma = X(\theta)$  라 할 때. 속력은

$$\begin{aligned} |X'(\theta)| &= (r(\theta)^2 + r'(\theta)^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= ((1 + \cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= (2 + 2 \cos \theta)^{\frac{1}{2}} \\ &= |2 \cos \frac{1}{2} \theta| \\ &= 2 \cos \frac{1}{2} \theta \quad (\because 0 \leq \theta < \pi) \end{aligned}$$

$\theta$ 는 0 부터  $\frac{\pi}{2}$  까지의 호의 길이는

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |X'(\theta)| d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos \frac{1}{2} \theta d\theta = 4 \sin \frac{1}{2} \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4 \sin \frac{1}{2} \frac{\pi}{2}.$$

호의 길이로써 재매개화를  $\tilde{X}(s)$  라 할 때

$$\tilde{X}(s) = X(\theta), \quad s = 4 \sin \frac{1}{2} \theta. \quad \text{or } \theta = 2 \arcsin \left( \frac{s}{4} \right)$$

$$\therefore \tilde{X}(s) = X(\theta) = X(2 \arcsin \frac{1}{4} s) = \left( (2 - \frac{1}{8} s^2)(1 - \frac{1}{8} s^2), s \cdot (1 - \frac{1}{16} s^2)^{\frac{3}{2}} \right)$$

b). 호의 전체 길이는  $\int_0^{\pi} |X'(\theta)| d\theta = \int_0^{\pi} 2 \cos \frac{1}{2} \theta d\theta = 4.$

$\theta$ 는 0 부터  $\theta_0$  까지의 호의 길이가 2 인  $\theta_0$  를 찾으면

$$\int_0^{\theta_0} |X'(\theta)| d\theta = 4 \sin \frac{1}{2} \theta_0 = 2, \quad \therefore \theta_0 = \frac{\pi}{3}.$$

원하는 좌표는  $X(\theta_0) = \left( \frac{3}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{4} \right).$

#8.

$$X(t) = (\cosh t, \sinh t, t), \quad -1 \leq t \leq 1$$

중심 구하기.

$$X'(t) = (\sinh t, \cosh t, 1)$$

$$|X'(t)| = \sqrt{\sinh^2 t + \cosh^2 t + 1} = \sqrt{2} |\cosh t| = \sqrt{2} \cosh t$$

$$\begin{aligned} \text{곡선의 길이 } L &= \int_{-1}^1 |X'(t)| dt = \int_{-1}^1 \sqrt{2} \cosh t dt \\ &= \sqrt{2} [\sinh t]_{-1}^1 = 2\sqrt{2} \sinh(1) = \sqrt{2} \left( e - \frac{1}{e} \right) \end{aligned} \quad \text{5점}$$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{L} \int_X x ds = \frac{1}{L} \int_{-1}^1 x(X(t)) \cdot |X'(t)| dt \\ &= \frac{1}{L} \int_{-1}^1 \cosh t \cdot \sqrt{2} \cosh t dt = \frac{1}{L} \sqrt{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{2} (\cosh 2t + 1) dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2L} \left[ \frac{1}{2} \sinh 2t + t \right]_{-1}^1 = \frac{1}{4 \sinh(1)} (\sinh(2) + 2) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2} \left( e - \frac{1}{e} \right)} \left( \frac{e^2 - 2^{-2}}{2} + 2 \right) \end{aligned} \quad \text{5점}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{L} \int_X y ds = \frac{1}{L} \int_{-1}^1 \sinh t \cdot \sqrt{2} \cosh t dt = 0 \quad (\text{기함수}) \quad \text{5점}$$

$$\bar{z} = \frac{1}{L} \int_X z ds = \frac{1}{L} \int_{-1}^1 t \cdot \sqrt{2} \cosh t dt = 0 \quad (\text{기함수}) \quad \text{5점}$$

(채점기준)

\*  $|X'(t)|$  틀리면 0점

\*  $L$  계산이 틀리면,  $\bar{x}$  0점

\*  $\bar{y}, \bar{z}$  에서  $\sinh t |X'(t)|$  와  $t |X'(t)|$  가 기함수라는 설명이 있어야 점수 부여.

( $t, \sinh t$ 가 기함수라는 이유로  $\bar{y} = \bar{z} = 0$  이라고 쓰면 0점)

9.  $X(t) = (t, e^t)$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) 로 매개화하면  
 $= (x(t), y(t))$

$$\kappa(t) = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{e^t}{(1+e^{2t})^{\frac{3}{2}}} \quad +10 \quad \left( \begin{array}{l} \text{정의만 맞은 경우} \\ +5 \end{array} \right)$$

곡률반경  $r(t) = \frac{1}{\kappa(t)} = \frac{(1+e^{2t})^{\frac{3}{2}}}{e^t}$  의 최솟값을 구하기 위해 미분하면

$$r'(t) = \frac{(1+e^{2t})^{\frac{1}{2}}(2e^{2t}-1)}{e^t} = 0.$$

$$\Leftrightarrow e^{2t} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \log \frac{1}{2}.$$

$\therefore$  곡률반경이 최소가 되는 점 :  $(\frac{1}{2} \log \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ .

+5

곡률벡터

$$\vec{\kappa}(t) = \frac{1}{|X'(t)|} \left( \frac{X'(t)}{|X'(t)|} \right)' = \left( \frac{-e^{2t}}{(e^{2t}+1)^2}, \frac{e^t}{(e^{2t}+1)^2} \right).$$

이므로 점cloud원의 중심은

$$X\left(\frac{1}{2} \log \frac{1}{2}\right) + \frac{\vec{\kappa}\left(\frac{1}{2} \log \frac{1}{2}\right)}{\kappa\left(\frac{1}{2} \log \frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= \left(\frac{1}{2} \log \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{27}{4} \left(-\frac{2}{9}, \frac{2}{9}\sqrt{2}\right) = \left(\frac{1}{2} \log \frac{1}{2} - \frac{3}{2}, 2\sqrt{2}\right)$$

+10

< 채점기준 >

총 25 점.

1. 곡률 및 곡률벡터는 책에 있는 모든 공식 사용 가능.
2. 외적을 이용하여 곡률을 계산한 경우 외적을 2차원에서 생각했으면 5점 감점.  
 (외적은 3차원에서만 정의됨)