

# 수학 및 연습 1 기말고사

(2011년 8월 1일 11:00-13:00)

학번: \_\_\_\_\_ 이름: \_\_\_\_\_

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

문제 1 (20점). 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점) 한 점  $(6, 2, -1)$  을 지나고 두 평면  $4x - 3y + 2z = 5$  와  $3x + 2y - z = -11$  에 동시에 수직인 평면의 방정식을 구하시오.
- (b) (10점) (a)에서 구한 평면과 직선  $\frac{7-x}{5} = y+1 = 1-z$  이 만나는 점을 구하시오.

문제 2 (20점). 원점에 놓인 광원에서 나선  $X(t) = (\cos t, \sin t, t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  에 빛을 투사하고 있다고 하자. 원점에서 투사된 빛이 점  $X\left(\frac{\pi}{2}\right)$  에서의 접촉평면에 반사되어 평면  $x = -4$  와 만나는 점의 좌표를 구하시오.

문제 3 (25점). 선형사상  $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  가

$$L \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad L \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

을 만족한다고 하자. 점

$$P(1, 0, -1), \quad Q(3, 2, 0), \quad R(2, 4, 6), \quad S(1, 1, -1)$$

에 대하여, 선분  $\overline{PQ}$ ,  $\overline{PR}$ ,  $\overline{PS}$  을 이웃하는 세 변으로 갖는 평행육면체를  $\mathbb{P}$  라고 할 때,  $L(\mathbb{P})$  의 부피를 구하시오.

문제 4 (30점). 선형사상  $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  은  $y$  축을 중심으로 양의 방향으로  $\theta$  만큼 회전하는 사상이다. 즉,  $y$  축 상의 점은 고정하고, 그 외의 점에 대해서는  $(X \times L(X)) \cdot (0, 1, 0) > 0$  을 만족하며  $y$  축을 중심으로  $\theta$  만큼  $X$  를 회전시키는 사상이다( $0 < \theta < \pi$ ). 또한 선형사상  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  는  $T(X) = (1, 2, 3) \times X$  으로 주어진다. 두 선형사상의 합성에 의해 만들어지는 선형사상  $L \circ T$  에 대응하는 행렬을 구하시오.

문제 5 (20점). 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점) 좌표공간의 다음 곡선

$$X(t) = \left( t \cos t, t \sin t, \frac{2\sqrt{2}}{3} t^{3/2} \right), \quad 0 \leq t \leq \pi$$

의 길이를 구하시오.

- (b) (10점) 극좌표로 주어진 다음 곡선

$$r = \sec \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

의 길이를 구하시오.

문제 6 (20점). 극좌표계에서  $r = |1 + 2 \cos \theta|$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$  로 주어진 곡선과, 직교좌표계에서  $(x-1)^2 + y^2 = 4$ ,  $y \leq 0$  로 주어진 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

문제 7 (20점). 단위구면 상의 곡선  $X(t) = (\sin t \cos t, \sin^2 t, \cos t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  는 속력이 최대인 점에서 가속도벡터와 속도벡터가 서로 수직임을 보이시오.

문제 8 (25점). 곡선  $X(t) = (t \cos t, t \sin t, \sqrt{3}t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  를 호의 길이

$$s = \int_0^t |X'(u)| du$$

로 재매개화한 곡선  $\tilde{X}(s)$  에 대하여,  $t = \pi$  일 때  $\tilde{X}''(s)$  를 구하시오.

문제 9 (20점). 다음 곡선의 기하학적 중심을 구하시오.

$$y = \cosh x, \quad -1 \leq x \leq 1$$