2008년 1학기

「수학 및 연습 1」

기말고사

문제 1. (a) X

(L을 t만큼의 평행이동이라 하자. 두 벡터 v, w 에 대하여
$L(v+w+t) \neq L(v+t)+L(w+t)$)

(b) O.

(선형사상과 행렬은 1-1 대응)

(c) O

($\Rightarrow$) v, w 가 수직이므로 $v \cdot w = 0$.
$|v-w|^2 = |v|^2 - 2v \cdot w + |w|^2 = |v|^2 + |w|^2$

($\Leftarrow$) $|v|^2 - 2v \cdot w + |w|^2 = |v-w|^2 = |v|^2 + |w|^2$ 이므로 $v \cdot w = 0$.
$\therefore$ v, w 는 수직.

(d) O

($(A-B)^2 = A^2 - AB - BA + B^2 = A^2 - 2AB + B^2$ (대각행렬끼리는 곱의 교환법칙 성립))

(e) X

($\det(2A) = 2^3 \det(A)$)

(f) X

($v \times w = -w \times v$)

(g) X

(반례. $(e_1 \times e_1) \times e_2 = 0$. but $e_1 \times (e_1 \times e_2) = e_1 \times e_3 = -e_2 \neq 0$)

(h) X

(원점주위 원운동 생각하자 (r이 반지름이라고 하고 $\theta(t)$는 각이 시간에 따른 함수라 하자.)
그러면 $f(t) = (r\cos\theta(t), r\sin\theta(t))$.

$f'(t) = (-r\sin\theta(t) \cdot \theta'(t), r\cos\theta(t) \cdot \theta'(t))$

$f''(t) = (-r\cos\theta(t) \cdot \theta'(t) - r\sin\theta(t) \cdot \theta''(t), -r\sin\theta(t) \cdot \theta'(t) + r\cos\theta(t) \cdot \theta''(t))$

but $f'(t) \cdot f''(t) \neq 0$.)

(i) X

(j) X (반지름 r인 원의 곡률 $\frac{1}{r}$)

2.(a).

① $p(X)=\frac{A\cdot X}{A\cdot A}A \Rightarrow p(p(X))=\frac{A\cdot\left(\frac{A\cdot X}{A\cdot A}A\right)}{A\cdot A}A=\frac{\frac{A\cdot X}{\cancel{A\cdot A}}\cancel{A\cdot A}}{A\cdot A}A=p(X).$

② $X=(x,y,z)$, $A=(1,2,2)$ 를 위의 식에 대입해서 증명한 경우.

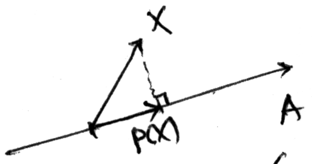
③ p를 행렬로 표현하면 $\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&4&4\\2&4&4\end{pmatrix}=:M$.

이를 제곱하면 $M^2=M$ 이 됨을 계산을 통해서 알 수 있음.

따라서 $p^2=p$.

④ 정사영의 정의를 이용하여 증명하는 경우.

$p(X)=tA$. (단, t는 $|X-tA|$를 최소로 하는 $t\in\mathbb{R}$)



따라서 $p(p(X))=p(tA)=tA$ 여야만 한다.

$\because$ $p(tA)=s(tA)$ 일 때, $l=|tA-s(tA)|$는 일반적으로 $l\geq 0$ 이고, $s=1$ 일 때 $l=0$ 이 되어 최소가 된다. 따라서 $s=1$ 이고, $p(tA)=tA$.

$\therefore$ $p(p(A))=p(tA)=tA=p(X)$.

* 정사영의 정의를 알고 있을 경우 : 5점.

* 풀이가 다 맞을 경우 : 10 점.

#2-(b)

$$M(X) = p(X) + B$$

$$M^2(X) = p(p(X)+B) + B = p(X) + p(B) + B$$

$$\vdots$$

$$M^{2008}(X) = p(X) + 2007\, p(B) + B$$

$$\left(M^n(X) = p(X) + (n-1)\, p(B) + B \right)$$ 7점

$X = X_0$, $\quad M^{2008}(X_0) = p(X_0) + 2007\, P(B) + B$

$$= (1341, 2679, 2679)$$ 10점

* $p(X) = \dfrac{x+2y+2z}{9}(1,2,2)$

$p(X_0) = A \qquad X_0 = (1,3,1)$

$p(B) = \dfrac{2}{3}A \qquad B = (2,1,1)$

$\therefore\ M(X_0) = A + B$

$M^2(X_0) = A + \dfrac{2}{3}A + B$

$\vdots$

$M^n(X_0) = A + \dfrac{2}{3}(n-1)A + B = \dfrac{2n+1}{3}A + B$ 7점

$\therefore\ M^{2008}(X_0) = \dfrac{2\times 2008+1}{3}(1,2,1) + (2,1,1)$

$= (1341, 2679, 2679)$ 10점

#3.

(예시답안) $\mathbb{R}^3$의 기저 $\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$에 대하여

$$L\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad L\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = L\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - L\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix},$$

$$L\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = L\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - L\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$$ 이므로

선형사상 L에 대응하는 행렬은 $A = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&2\\0&2&4\end{pmatrix}$ 이다. — (1) 5점

$L(B)$의 부피 $= |\det A| \times (B$의 부피$)$ — (2) 10점

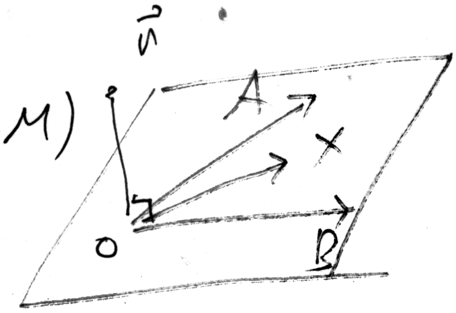
$= 6 \times 1 = 6$ — (3) 5점

* 채점기준

- (1)에서 구한 행렬 A가 틀리면 (1), (3) 부분에서 모두 0점 처리.
- (2)에서 $\det A$의 절대값을 쓰지 않으면 2점 감점.
- 다른 방법으로 푼 경우 (선형사상 L에 대응하는 행렬을 구하지 않고 푼 경우)는 답이 맞더라도 설명이 부족하면 10점 감점.
- 선형사상 L에 대응하는 행렬을 구하고, (2)에 제시된 풀이와 다른 방법으로 푼 경우 답이 틀리면 총 5점 부여 (즉, 15점 감점).

4. (풀이 1)

- X 는 $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ 가 이루는 평면(: M) 위의 점



$\vec{n} = \vec{OA} \times \vec{OB} = (-1, -2, -3)$

$\therefore$ M : $(1, 2, 3) \cdot (X - A) = 0$

$\Rightarrow \quad x + 2y + 3z = 0$ 10

- $|X - C|$ 최소값 : C 에서 평면 M 에 대한 수선의 길이.

$\Rightarrow \dfrac{|C \cdot \vec{n}|}{\sqrt{\vec{n} \cdot \vec{n}}} = \dfrac{|1+2+3|}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}} = \dfrac{6}{\sqrt{14}} = \dfrac{3}{7}\sqrt{14}$ 10

$\left(= \dfrac{|C \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} \right)$

$\left(\text{or } \sqrt{\dfrac{18}{7}}, \dfrac{\sqrt{126}}{7}, 3\sqrt{\dfrac{2}{7}} \right)$

(풀이 2)

4. $\{A, B, X\}$: 일차종속

$\therefore X = aA + bB \quad (a, b \in \mathbb{R})$

$= (a+b,\ a-2b,\ -a+b)$

$\therefore |X-C| = \sqrt{(a+b-1)^2 + (a-2b-1)^2 + (a-b+1)^2}$ 10

$= \sqrt{3a^2 + 6b^2 - 4ab - 2a + 3}$

$= \sqrt{6\left(b - \frac{a}{3}\right)^2 + \frac{7}{3}\left(a - \frac{3}{7}\right)^2 + \frac{18}{7}}$

$\therefore a = \frac{3}{7},\ b = \frac{1}{7}$ 일때

최소값 $\sqrt{\frac{18}{7}} = \frac{3}{7}\sqrt{14}.\ \left(\text{or } \frac{6}{\sqrt{14}},\ \frac{\sqrt{126}}{7},\ 3\sqrt{\frac{2}{7}}\right)$

10

5. $\frac{d}{dt}(X(t)\cdot(X'(t)\times X''(t))) = X'(t)\cdot(X'(t)\times X''(t)) + X(t)\{(X''(t)\times X''(t)) + (X'(t)\times X'''(t))\}$

$= 0 + 0 + X(t)\cdot(X'(t)\times X'''(t))$

$= X(t)\cdot(X'(t)\times X'''(t))$

- 성분별로 써서 계산한경우 실제 미분해서 확인해야함 (부분점수 없음)
- $x'\cdot(x'\times x'')=0$ 생각하고 넘어가면 10점
- det. 에 절대값 붙인경우 10점
- $\frac{d}{dt}\det(x, x', x'') = \det(X, X', X''')$ 이유없이 넘어가면 10점

6

방법 1 $\vec{v} = \vec{w} \times \vec{p}$

$= \pm \frac{w}{\sqrt{14}} (1, 2, 3) \times (1, 1, 1)$ — 10점

$= \pm \frac{w}{\sqrt{14}} (-1, 2, -1)$ — 15점

$|\vec{v}| = \sqrt{\frac{3}{7}}\, w$ — 20점

방법 2. $v = rw$ 이용

회전축 매개화 → $(t, 2t, 3t)$

$(1, 2, 3) \cdot (t-1, 2t-1, 3t-1) = 0$ — 10점

→ $14t = 6$

$\therefore t = \frac{3}{7}$

∴ 동점과 회전축 사이의 거리는

$\left| \left(\frac{3}{7} - 1, \frac{6}{7} - 1, \frac{9}{7} - 1 \right) \right| = \sqrt{\frac{3}{7}}$

$\therefore v = \sqrt{\frac{3}{7}}\, w$ — 20점.

방법 1 에서 외적 계산 틀린 후 속력 맞아도 10 점.

#7. Let $r = 1+\cos\theta$.

Then $r' = -\sin\theta$.

• 길이 $l = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2+(r')^2}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta}\, d\theta$

$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2+2\cos\theta}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \left|2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| d\theta$

$= 4\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta = 8\left[\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi} = 8.$

• 넓이 $S = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1+2\cos\theta+\cos^2\theta\, d\theta$

$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1+2\cos\theta+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\theta\, d\theta$

$= \frac{1}{2}\left[\theta+2\sin\theta+\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi}$

$= \frac{1}{2}(2\pi+\pi) = \frac{3}{2}\pi.$

채점기준 : i) 길이를 구하는 공식을 알면 5점. 답까지 맞으면 10점.

ii) 넓이를 구하는 공식을 알면 5점. 답까지 맞으면 10점.

iii) 총 20점.

iv) $x = r\cos\theta = (1+\cos\theta)\cos\theta$, $y = r\sin\theta = (1+\cos\theta)\sin\theta$ 로 매개화 하여 풀었을 경우에도

공식을 알면 5점. 답까지 맞으면 10점.

8, $X(t) = (3t\cos t,\ 3t\sin t,\ 2\sqrt{2}\,t^{\frac{3}{2}}),\ 0 \le t \le 2t$

$X'(t) = (3\cos t - 3t\sin t,\ 3\sin t + 3t\cos t,\ 3\sqrt{2}\,t^{\frac{1}{2}})$

$|X'(t)| = \sqrt{9t^2+18t+9} = 3|t+1| = 3(t+1) \quad (\because 0 \le t \le 2\pi)$ ┘ 5점

질량 $= \int_X \mu\, ds = \int_0^{2\pi} \mu(X(t)) \cdot |X'(t)|\, dt$

$= \int_0^{2\pi} (9t^2 + 8t^3) \cdot 3(t+1)\, dt$ ┘ 10점

$= 3\int_0^{2\pi} 8t^4 + 17t^3 + 9t^2\, dt$

$= 3\left(\frac{256}{5}\pi^5 + 68\pi^4 + 24\pi^3\right)$

$= \frac{768}{5}\pi^5 + 204\pi^4 + 72\pi^3$ // ┘ 15점

9. (a) $s = \int_0^t |X'(u)|\,du$

┘ 5점

$= \int_0^t |u|\,du = \int_0^t u\,du \quad (\because\ 0 \le t \le 2\pi)$

$= \frac{1}{2}t^2$

$\therefore\ t = \sqrt{2s} \quad (\because\ 0 \le t \le 2\pi)$

$\therefore\ \tilde{X}(s) = \left(\cos\sqrt{2s} + \sqrt{2s}\sin\sqrt{2s},\ \sin\sqrt{2s} - \sqrt{2s}\cos\sqrt{2s}\right)$

┘ 7점

$0 \le s \le 2\pi^2$

┘ 10점.

* $\tilde{X}(s)$ 에서 s의 범위를 명시하지 않으면 감점.

문제 9-(b)

$$X(t) = (\cos t + t\sin t\ ,\ \sin t - t\cos t)$$

(b) $X(\pi) = (-1, \pi)$ 에서의 곡률 벡터를 구하라.

풀이 1)

$$K(t) = \frac{1}{|X'(t)|}\left(\frac{X'(t)}{|X'(t)|}\right)'$$

┘ 3점

$$= \frac{1}{t}(-\sin t, \cos t)$$

┘ 4점

$$K(\pi) = \frac{1}{\pi}(0, -1) = \left(0, -\frac{1}{\pi}\right)$$

┘ 3점.

풀이 2) (a)를 이용하여 호의 길이로 재매개화된 $\tilde{X}(s)$에 대하여.

곡률벡터가 $\tilde{X}''(s)$ 가 된다.

┘ 3점

$$\tilde{X}'(s) = (\cos\sqrt{2s}\ ,\ \sin\sqrt{2s})$$

$$\tilde{X}''(s) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2s}}\sin\sqrt{2s},\ \frac{1}{\sqrt{2s}}\cos\sqrt{2s}\right)$$

┘ 4점

$$\tilde{X}''\left(\frac{1}{2}\pi^2\right) = \left(0, -\frac{1}{\pi}\right)$$

┘ 3점.

9.(c)

(b)에 의해서 접촉원의 반지름 $= \dfrac{1}{|\vec{k}(\pi)|} = \dfrac{1}{|(0, -\frac{1}{\pi})|} = \pi$

접촉원의 중심 $= X(\pi) + \dfrac{\vec{k}(\pi)}{|\vec{k}(\pi)|^2} = (-1, \pi) + (0, -\pi) = (-1, 0)$

∴ 접촉원 : $(x+1)^2 + y^2 = \pi^2$

* 채점기준

- 접촉원의 반지름과 중심을 구하는 식이 맞으면 각각 3점. 답까지 맞으면 각각 5점.
- 접촉원의 중심을 구하는데 있어서 그래프를 이용한 경우는 "접촉원의 중심"에 대한 점수는 없음.

#9 (d) 중심 $= (\bar{x}, \bar{y})$

$l =$ 곡선 X의 길이 $= \int_0^{2\pi} |X'(t)|\, dt = \int_0^{2\pi} t\, dt = 2\pi^2$ +2

$\bar{x} = \frac{1}{l} \int_X x\, ds = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} (\cos t + t\sin t)\, t\, dt = -2$ +2 +2

$\bar{y} = \frac{1}{l} \int_X y\, ds = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} (\sin t - t\cos t)\, t\, dt = -\frac{3}{\pi}$ +2 +2

(답) 중심 $= \left(-2, -\frac{3}{\pi}\right)$