

# 수학 및 연습 1 기말고사

(2014년 7월 28일 19:00-21:00)

학번: \_\_\_\_\_ 이름: \_\_\_\_\_

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

문제 1 (20점).  $\mathbb{R}^3$  상의 벡터  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  가 일차독립일 때, 선형변환  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  가 다음과 같이 주어져 있다.

$$T(X) = (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3) \times X, \quad X \in \mathbb{R}^3$$

이때, 선형변환  $T$ 에 의한 상  $T(\mathbf{a}_1), T(\mathbf{a}_2), T(\mathbf{a}_3)$  도 일차독립인지 판정하시오.

문제 2 (20점). 세 점  $(2, 1, 0), (0, 1, -2), (5, -1, 2)$  를 지나는 평면  $P$  상의 점  $(2, 1, 0)$  에서  $(1, 1, 1)$  방향으로 진행하던 빛이 평면  $x - 2y - z = 5$  에 반사되어 다시 평면  $P$  에 맺히는 상을 구하시오.

문제 3 (20점). 공간 속의 점  $(1, -1, 2)$  에서 두 평면  $x - 2y + 4z = 2$  와  $x + y - 2z = 5$  의 교선에 내린 수선의 발을 구하시오.

문제 4 (10점).  $3 \times 3$  행렬  $A$  가

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

를 만족할 때,  $A$  의 행렬식을 구하시오.

문제 5 (20점).  $n$ -치환  $\sigma$  에 대하여,  $L_\sigma: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  이 다음과 같이 정의될 때 물음에 답하시오.

$$L_\sigma: (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

- (a) (10점)  $L_\sigma$  가 선형사상임을 보이시오.  
(b) (10점) 3-치환  $\sigma$  가 다음과 같을 때  $L_\sigma$  에 대응되는 행렬  $A$  를 구하고,  $A$  의 행렬식을 구하시오.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

문제 6 (20점). 네 점  $O(0, 0, 0), P_1(1, 1, 1), P_2(1, 2, 4), P_3(1, 3, 9)$  와 행렬

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 2 \\ -3 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

에 대응되는 선형사상  $L_A$  에 대해 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점) 네 점  $O, P_1, P_2, P_3$  를 꼭지점으로 하는 사면체의 부피를 구하시오.  
(b) (10점) 네 점  $L_A(O), L_A(P_1), L_A(P_2), L_A(P_3)$  를 꼭지점으로 하는 사면체의 부피를 구하시오.

문제 7 (20점). 공간에서 점  $P = (1, 0, -1)$  에 힘  $\mathbf{f} = (0, 2, 1)$  를 가하였다.

- (a) (10점) 원점  $O$  에 대한  $P$  의 회전력과 회전이 일어나는 평면의 식을 모두 구하시오.  
(b) (10점) 점  $P$  에 힘  $\mathbf{f}$  와 같은 크기의 힘  $\mathbf{g}$  을 가하여, 회전이 일어나는 평면과 회전하는 방향은 모두 (a) 의 경우와 같지만 회전력의 크기는 가장 크게 하고자 한다. 위의 모든 조건을 만족하는 힘  $\mathbf{g}$  를 구하시오.

문제 8 (30점). 점  $A(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$  와 점  $B(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$  까지의 거리의 곱이  $\frac{1}{2}$  인 점들의 자취곡선을  $X$  라 할 때, 다음 물음에 답하시오.

(a) (15점) 곡선  $X$  를 극좌표로 매개화 하시오.

(b) (15점) 실수  $0 \leq s < 1$  에 대하여, 제 1 사분면 위에 있는 곡선  $X$  의 점들 중에서 원점  $O$  에서의 거리가  $s$  인 점을  $P(s)$  라 하자.  $P(0)$  에서  $P(s)$  까지의 곡선의 길이를  $l(s)$  라고 하면

$$l(s) = \int_0^s \frac{1}{\sqrt{1-t^4}} dt$$

임을 보이시오.

문제 9 (20점). 평면곡선  $X(t) = (2 \cos t - \cos(2t), 2 \sin t - \sin(2t))$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(a) (10점)  $X$  를 호의 길이로 재매개화 하시오.

(b) (10점)  $X$  의 곡률반경을  $R(t) := \frac{1}{\kappa(t)}$  라고 하면,  $\sin \frac{t}{2} = \frac{3}{8} R(t)$  임을 보이시오.

문제 10 (20점). 사이클로이드  $X(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) 위의  $t = \pi$  일 때의 점  $P$  에서의 접촉원의 중심을 구하시오.