

수학 및 연습 1 기말고사

(2014년 6월 7일 오후 1:00-3:00)

학번:

이름:

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

문제 1 (20점). 좌표공간에서 점 $P(1, 2, 3)$ 을 지나고 $\mathbf{v} = (2, 3, -1)$ 과 나란한 직선 ℓ_1 과, 점 $Q(0, 3, 2)$ 를 지나고 $\mathbf{w} = (1, 3, 2)$ 와 나란한 직선 ℓ_2 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점) $\mathbf{x} = \overrightarrow{PQ}$ 의 $\mathbf{n} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ 에 대한 정사영을 구하시오.
- (b) (10점) 두 직선 ℓ_1 과 ℓ_2 사이의 거리를 구하시오.

문제 2 (20점). $\mathbf{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ 일 때, 함수 $L: \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}$ 을 다음과 같이 정의하자.

$$L(P) = P + P^t \quad (P \in \mathbf{M}).$$

- (a) (5점) 임의의 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{M}$ 을 \mathbb{R}^4 의 벡터 (a, b, c, d) 와 같이 보았을 때, L 이 선형사상임을 증명하시오.
- (b) (10점) L 에 대응되는 행렬 A 를 찾고, $\det A$ 도 구하시오.
- (c) (5점) 행렬 P_1, P_2, P_3, P_4 가 \mathbf{M} 의 일차독립인 벡터일 때, $L(P_1), L(P_2), L(P_3), L(P_4)$ 는 일차독립인가? 맞으면 증명을 하고 틀리면 반례를 드시오.

문제 3 (20점). 다음 명제가 참이면 T, 거짓이면 F 를 표시하시오.

(답이 맞으면 4점, 틀리면 -4점, 답안 미기재시 0점. 답만 쓰시오.)

- (a) (4점) $n \times n$ 정사각행렬 A 와 B 에 대하여 $AB = 0$ 이면 $BA = 0$ 이다.
- (b) (4점) $n \times n$ 정사각행렬 A 에 대하여 $\det(A^t A) = (\det A)^2$ 이다.
- (c) (4점) $n \times n$ 정사각행렬 A 와 B 에 대하여 $\det(A + B) = \det A + \det B$ 이다.
- (d) (4점) $n \times n$ 정사각행렬 A 와 B 에 대하여 $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ 이다.
- (e) (4점) 3×3 정사각행렬 A 에 대하여 $A^3 = 0$ 이면 $A^2 = 0$ 또는 $A = 0$ 이다.

문제 4 (20점). 삼차원 좌표공간의 점 P 를 지나고 단위벡터 \mathbf{n} 에 수직인 평면을 α 라고 하자. 이때 삼차원 좌표공간의 점 X 에 대해 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점) X 를 평면 α 로 정사영한 점을 $E(X)$ 라고 하자. 이때 $E(X) = X + ((P - X) \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$ 임을 보이시오.
- (b) (10점) \mathbb{R}^3 에서 평면 $x + 2y + 3z = 0$ 으로의 정사영을 나타내는 선형사상이 있다. 이 선형사상에 대응되는 행렬 A 를 구하고, $\det(A^{2014} - I)$ 를 구하시오.

문제 5 (20점). 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점) \mathbb{R}^3 상에 벡터 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ 가 일차독립일 때, $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} \neq 0$ 임을 보이시오.
- (b) (10점) \mathbb{R}^3 상에 벡터 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ 가 일차독립일 때, 벡터 $\mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{v} \times \mathbf{w}, \mathbf{w} \times \mathbf{u}$ 도 일차독립임을 보이시오.

문제 6 (20점). 삼차원 좌표공간에서 다음 방정식으로 결정되는 곡선을 생각하자.

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad (x - 1)^2 + y^2 = 1, \quad z \geq 0$$

- (a) (10점) 위의 곡선을 매개화하시오.
- (b) (10점) 곡선 위의 점 $(0, 0, 2)$ 에서의 접촉평면의 방정식을 구하시오.

문제 7 (20점). 평면상의 곡선이

$$X(t) = \left(\arctan t, \frac{1}{2} \log(1 + t^2) \right)$$

로 주어졌을 때 다음을 구하시오.

- (a) (10점) $0 \leq t \leq 1$ 일 때 곡선의 길이를 구하시오.
- (b) (10점) $t = 1$ 에서 접선의 매개변수 방정식을 구하시오.

문제 8 (20점). 원기둥좌표계에서

$$r = z = e^\theta$$

로 주어진 곡선 X 를 호의 길이로 매개화하시오. (단, 곡선의 길이는 점 $(r, \theta, z) = (1, 0, 1)$ 로부터 재기 시작한다.)

문제 9 (20점). 곡선 $X(t) = (t, \sin t)$ 위의 점 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 에서의 접촉원을 구하시오.

문제 10 (20점). 극좌표계로 주어진 곡선 $r = 2 \cos \theta - 1$ 로 둘러싸인 부분 중 점 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 을 포함하는 부분의 넓이를 구하시오.