1번.

$$\begin{cases} x+y+z+w=2 \\ 2x+y+2z+w=3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+z=1 \\ y+w=1 \end{cases}$$

$(x, y, z, w) = (t, s, 1-t, 1-s)$ 라 하면, 교점들과 원점 사이의 거리

$$d(t,s) = \sqrt{t^2+s^2+(1-t)^2+(1-s)^2}$$

$$= \sqrt{2\left(t-\tfrac{1}{2}\right)^2+2\left(s-\tfrac{1}{2}\right)^2+1}$$

$t=\frac{1}{2},\ s=\frac{1}{2}$ 일 때 (즉, $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 에서) 최소거리는 1 //

채점 기준

거리에 대한 올바른 lower bound를 잡아야 함. (하계) (ex: 거리 $\geq \boxed{}$)

이 때, 논리적 비약이 있는 경우 -10점.

등호 성립하는 경우에 대한 설명이 없으면 -5점.

#2 삼차원 공간의 원점에서 $v = (1,2,3)$ 방향으로 발사된 빛이 세점 $P = (1,2,3)$ $Q = (2,3,1)$, $R = (3,1,2)$ 을 포함하는 평면에 반사될 때, 반사된 빛이 xy-평면과 만나는 점을 구하라.

풀이. 우선, 평면에 수직인 벡터 N을 구한다

$\overrightarrow{PQ} = (1,1,-2)$ $\overrightarrow{PR} = (2,-1,-1)$

$\Rightarrow \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (-3,-3,-3)$

$\therefore N = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ (or $(1,1,1)$ 등) 5점

다음으로, 반사되어 나가는 방향벡터 v^*를 구한다.

$$v^* = v - 2\frac{v \cdot N}{N \cdot N} N$$

$$= (1,2,3) - 2 \times \frac{(1,2,3)\cdot(1,1,1)}{(1,1,1)\cdot(1,1,1)}(1,1,1)$$

$$= (1,2,3) - 2 \cdot \frac{6}{3}(1,1,1) = (-3,-2,-1)$$ 10점

점 $P = (1,2,3)$ 이 P, Q, R 을 포함하는 평면상의 점이므로, 원점에서 $(1,2,3) = v$ 방향으로 발사된 빛은 $(1,2,3) = P$ 에서 반사되어 $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}$ 직선을 따라간다. 15점

이 직선이 xy-평면과 만나는 점은 $z=0$ 를 대입하여 계산하면, $x=-8$, $y=-4$, $z=0$.

즉, $(-8,-4,0)$ 가 원하는 답이다. 20점

#3(a) a와 거리가 최소인 H위의 벡터를 $s\cdot u + tv$ $(s, t \in \mathbb{R})$ 이라고 하자. 이때 a와 $s\cdot u + tv$ 사이의 거리는 $|a-(su+tv)|$.

그런데

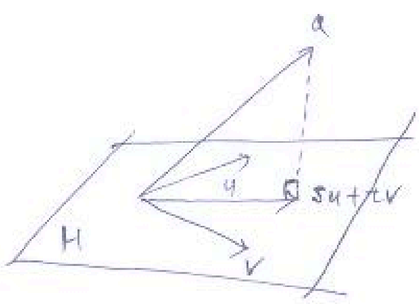
$$|a-(su+tv)|^2 = (a-(su+tv))\cdot(a-(su+tv))$$
$$= (s-(a\cdot u))^2 + (t-(a\cdot v))^2 + a^2 - (a\cdot u)^2 - (a\cdot v)^2$$

따라서 $s=(a\cdot u)$, $t=(a\cdot v)$ 일때 거리가 최소가 된다.

즉, $s\cdot u + t\cdot v = (a\cdot u)\cdot u + (a\cdot v)\cdot v$

(별해)

H 위의 벡터 중 a와 거리가 최소인 것은 a에서 H로 내린 정사영이다. 그림과 같이 $su+tv$를 이 정사영이라고 두자.



그러면 $a-(su+tv)$는 H와 수직이 되므로

$$(a-(su+tv))\cdot u = (a\cdot u) - s = 0$$
$$(a-(su+tv))\cdot v = (a\cdot v) - t = 0$$
$$\therefore s=(a\cdot u),\ t=(a\cdot v)$$

즉, 정사영한 벡터는 $(a\cdot u)u + (a\cdot v)v$ 이다.

(단, 정사영한 벡터를 구하는 과정에서 논리가 부정확한 경우 -5점)

#3 (b) 벡터 $x, y \in \mathbb{R}^3$, 상수 $c \in \mathbb{R}$ 에 대하여

$$\begin{cases} P(x+y) = P(x)+P(y) \\ P(cx) = c\,P(x) \end{cases}$$ 임을 보이자

$$\left(\text{or } \ P(cx+y) = c\,P(x)+P(y) \right)$$

3점

(*)

i) $P(x+y) = ((x+y)\cdot u)u + ((x+y)\cdot v)v$

$= (x\cdot u + y\cdot u)u + (x\cdot v + y\cdot v)v$

$= (x\cdot u)u + (y\cdot u)u + (x\cdot v)v + (y\cdot v)v$

$= \{(x\cdot u)u + (x\cdot v)v\} + \{(y\cdot u)u + (y\cdot v)v\}$

$= P(x) + P(y)$

5점

ii) $P(cx) = (cx\cdot u)u + (cx\cdot v)v$

$= c(x\cdot u)u + c(x\cdot v)v$

$= c\{(x\cdot u)u + (x\cdot v)v\}$

$= c\,P(x)$

10점

※참고※

(*) 만 보여도 10 점

단, 상수 c 에 대한 언급 (eg: $c \in \mathbb{R}$, c는 실수) 없으면 (−1).

($P(c\vec{x}+\vec{y})$ 처럼 상수와 벡터를 구분하면 감점 X)

#3. (1) $\vec{a}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ 에 대하여

$$P(a) = \left(\vec{a}\cdot\tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)\right)\tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1) + \left(\vec{a}\cdot(0,1,0)\right)(0,1,0)$$

3점

$$= \tfrac{1}{2}(x+z)(1,0,1) + y(0,1,0)$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}z,\ y,\ \tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}z\right)$$

5점

따라서 $L_p = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

10점

다른방법.,

$e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,0,1)$ 에 대하여

$P(e_1)=(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$, $P(e_2)=(0,1,0)$, $P(e_3)=(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$

이므로

$L_p = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

10점

(4점, 7점, 10점)

#4

sol) 임의의 $n \in \mathbb{N}$ 에 대하여 $(L(a,b,c))^n = \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \\ B & C & A \end{pmatrix}$ 인 형태가

됨을 수학적 귀납법을 이용하여 보이자. — (*)

i) $n=1$ 일때는 자명하다.

ii) $n=k$ 일때 성립한다고 가정하면

$$(L(a,b,c))^{k+1} = (L(a,b,c))^k \cdot L(a,b,c) = \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \\ B & C & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} Aa+Bc+Cb & Ab+Ba+Cc & Ac+Bb+Ca \\ Ca+Ac+Bb & Cb+Aa+Bc & Cc+Ab+Ba \\ Ba+Cc+Ab & Bb+Ca+Ac & Bc+Cb+Aa \end{pmatrix}$$

인데, $P = Aa+Bc+Cb$, $Q = Ab+Ba+Cc$, $R = Ac+Bb+Ca$

라고 두면 $(L(a,b,c))^{k+1} = \begin{pmatrix} P & Q & R \\ R & P & Q \\ Q & R & P \end{pmatrix}$ 꼴이다.

이제 위 사실을 이용하면

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{(L(1,0,2))^n \times L(1,0,2)} = \underbrace{\begin{pmatrix} a+2b & b+2c & 2a+c \\ c+2a & a+2b & 2c+b \\ b+2c & c+2a & 2b+a \end{pmatrix}}_{(L(1,0,2))^{n+1}}$$

에서 $(L(1,0,2))^{n+1}$의 모든 항의 합 $= 3 \times [(L(1,0,2))^n$의 모든 항의 합$]$

을 얻는다. $L(1,0,2) = 3^2$ 이므로 $L(1,0,2)^{2009} = 3^{2010}$

(채점기준)

1) i) 수학적 귀납법 (또는 엄밀한 증명)을 통한 일반적인 공식을 얻고, 답을 구한 경우 20점

ii) 추측 (규칙성에 의한 일반화)에 의하여 답을 구한 경우 15점

(※ sol)에서 (*)단계를 보이지 않은 경우도 추측에 해당함.)

2) 1)에서 풀이과정 (귀납법 or 추측)은 맞고, 답이 틀린 경우 5점 감점.

3) 풀이과정에 불필요한 내용 (행렬식을 이용한 계산, 선형사상에 대한 잘못된 적용) 이 있는 경우 5점 감점

4) 행렬식을 이용한 계산에 의하여 우연히 답을 얻은 경우 0점.

5) 답을 구하지 않은 경우 0점. (ex. 행렬 형태로 마무리가 된 경우)

6) 풀이 과정이 모두 틀리고 답만 맞은 경우 0점.

(※ 예를 들어 4)인 경우가 6)인 예이다.)

5 (a). $\det A = 5$. (5점)

(10점)

∘ $\det(A^{-2009}) = \left(\det(A^{-1})\right)^{2009} = \left(\frac{1}{5}\right)^{2009}$. (5점)

(b) 평행이동은 부피에 영향을 미치지 않는다.

(10점) $\therefore 10 = \det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3a & 2a & -a \end{pmatrix}$ $\left(\because 1 \le r \le 2,\ 2 \le s \le 3,\ 0 \le t \le a\right)$ ~~(5점)~~

$= a \det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$= 5a$

$\therefore a = 2$.

∘ (b) 에서 $\begin{pmatrix} 0 \le r \le 2 \\ 0 \le s \le 3 \end{pmatrix}$ 으로 잘못본 경우 − 5점.

∘ 숫자 잘못본 경우 or 계산실수 − 5점.

∘ 다른방법으로 풀었을 시에도 (방법이 & 답) 맞으면 ok.

(풀이1)

6. $X(t) = (\sin t, \cos t, t)$

$X'(t) = (\cos t, -\sin t, 1)$

$X''(t) = (-\sin t, -\cos t, 0)$

$X(\frac{\pi}{6}) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{6})$

$X'(\frac{\pi}{6}) = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$

$X''(\frac{\pi}{6}) = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ .... 여기까지 정확히 계산하면 +5점.

$$\det \begin{pmatrix} x-\frac{1}{2} & y-\frac{\sqrt{3}}{2} & z-\frac{\pi}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$ .... 두가지 형태중 하나라도 정확히 알고있으면 +5점.

$$= (x-\frac{1}{2}, y-\frac{\sqrt{3}}{2}, z-\frac{\pi}{6}) \cdot \left((\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 1) \times (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0) \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - z + \frac{\pi}{6} = 0$$ .... 구하는 과정에 계산 실수가 있거나 "=0" 빠뜨으면 -5점.

(풀이2)

접촉평면 $= \{ X(\frac{\pi}{6}) + tX'(\frac{\pi}{6}) + sX''(\frac{\pi}{6}) : s, t \in \mathbb{R} \}$ .... 5점.

$= \{ (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{6}) + t(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 1) + s(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0) : s, t \in \mathbb{R} \}$.

* $X(\frac{\pi}{6})$, $X'(\frac{\pi}{6})$, $X''(\frac{\pi}{6})$ 의 계산중 하나 틀릴때 마다 -5

7. $X(\theta) = (\cos\theta - \sin\theta \cdot \cos\theta,\ \sin\theta - \sin^2\theta)$

$= (1-\sin\theta)(\cos\theta,\ \sin\theta)$

$\therefore r(\theta) = 1-\sin\theta, \quad r'(\theta) = -\cos\theta$

$$\text{length} = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(\theta) + (r'(\theta))^2}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{1-2\sin\theta + \sin^2\theta + \cos^2\theta}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2-2\sin\theta}\, d\theta$$ 5점

$$= \sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{2}\pi} \sqrt{1+\cos t}\, dt \quad \left(\theta = t - \frac{\pi}{2} \text{로 치환}\right)$$

$$= \sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{2}\pi} \sqrt{2}\cdot\left|\cos\frac{t}{2}\right| dt$$

$$= 2\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\frac{t}{2}\, dt - \int_{\pi}^{\frac{5}{2}\pi} \cos\frac{t}{2}\, dt\right)$$

$$= 2\left(\left[2\sin\frac{t}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \left[2\sin\frac{t}{2}\right]_{\pi}^{\frac{5}{2}\pi}\right)$$

$$= 2\left(2\sin\frac{\pi}{2} - \cancel{2\sin\frac{\pi}{4}} - \cancel{2\sin\frac{5}{4}\pi} + 2\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 8$$ 15점

* 사소한 계산실수 −5점

$$\text{Area} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1-\sin\theta)^2\, d\theta$$ 5점

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1-2\sin\theta + \sin^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1-2\sin\theta + \frac{1-\cos 2\theta}{2}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}\theta + 2\cos\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{3}{2}\pi$$ 15점

#8. $X(t) = (\sin t\cos t,\ \sin^2 t,\ \cos t)$ $\quad 0 \le t \le \pi$.

$\mu(x,y,z) = \sqrt{y}$.

* 채점기준).

◦ 질량을 잘못구하더라도 (2)가 맞으면 (c) : 5점.

◦ (b)를 잘못구하면 (d) : 0점

◦ (b), (d) 계산실수시 부분점수 없음.

◦ 적분 계산과정이 달라도 답이 맞으면 ok.

Sol) $m = \int_X \mu\, ds = \int_X \mu(X(t))\cdot|X'(t)|\,dt$ — (1)

$\bar{y} = \frac{1}{m}\int_X y\cdot\mu\, ds = \frac{1}{m}\int_X y\cdot\mu(X(t))\cdot|X'(t)|\,dt$ — (2)

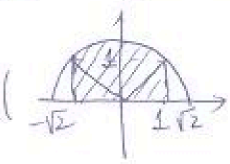
$X'(t) = (\cos^2 t - \sin^2 t,\ 2\sin t\cdot\cos t,\ -\sin t)$

$|X'(t)| = \sqrt{1+\sin^2 t}$

$\therefore$ 질량 $m = \int_0^\pi \sqrt{\sin^2 t}\cdot\sqrt{1+\sin^2 t}\,dt$

$= \int_0^\pi \sin t\cdot\sqrt{1+\sin^2 t}\,dt$ ┘ 5점. — (a)

$= \int_0^\pi \sin t\sqrt{2-\cos^2 t}\,dt$ $\quad$ ($\cos t = u$ 로 치환)

$= \int_{-1}^{1}\sqrt{2-u^2}\,du$ $\quad$ ( 빗금친 부분의 넓이

$= 1+\frac{\pi}{2}$ ┘ 10점. — (b)

$\bar{y} = \frac{1}{1+\frac{\pi}{2}}\int_0^\pi \sin^2 t\cdot\sqrt{\sin^2 t}\cdot\sqrt{1+\sin^2 t}\,dt$

$= \frac{2}{2+\pi}\int_0^\pi \sin^3 t\sqrt{1+\sin^2 t}\,dt$ ┘ 5점. — (c)

$= \frac{2}{2+\pi}\int_0^\pi \sin t(1-\cos^2 t)\sqrt{2-\cos^2 t}\,dt$ $\quad$ ($\cos t = u$)

$= \frac{2}{2+\pi}\int_{-1}^{1}(1-u^2)\sqrt{2-u^2}\,du$

$= \frac{2}{2+\pi}\left[\int_{-1}^{1}\sqrt{2-u^2}\,du - \int_{-1}^{1}u^2\sqrt{1-u^2}\,du\right]$

$= 1 - \frac{2}{2+\pi}\int_{-1}^{1}u^2\sqrt{1-u^2}\,du$ $\quad$ ($u = \sqrt{2}\sin\theta$)

$= 1 - \frac{2}{2+\pi}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 4\sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta$

$= 1 - \frac{2}{2+\pi}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 2\theta\,d\theta$

$= 1 - \frac{2}{2+\pi}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos 4\theta}{2}\,d\theta = 1 - \frac{\pi}{4+2\pi} = \frac{4+\pi}{4+2\pi}$ ┘ 10점. — (d)

9. (i) 곡률벡터의 식을 이용하여 푼 경우

곡률벡터 $\vec{K}(t) = \dfrac{1}{|X'(t)|}\left(\dfrac{X'(t)}{|X'(t)|}\right)'$ — 5점

$X'(t) = (1-\cos t,\ \sin t,\ 1+\cos t,\ -\sin t)$

$|X'(t)| = \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t + (1+\cos^2 t) + (-\sin t)^2} = 2$

따라서 $\vec{K}(t) = \frac{1}{4} X''(t)$

$X''(t) = (\sin t,\ \cos t,\ -\sin t,\ -\cos t)$ 이므로

$\vec{K}(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{4} X''(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ — 15점

곡률 $K(t) = |\vec{K}(t)|$

따라서 $K(\pi/4) = |\vec{K}(\pi/4)| = \frac{\sqrt{2}}{4}$ — 20점

(ii) 호의 길이로 재매개화하여 푼 경우

$s = \int_0^t |X'(u)|\, du = \int_0^t 2\, du = 2t$

따라서 $\vec{K}(t) = \tilde{X}''(s)$ 이므로, — 5점

$\tilde{X}(s) = (s/2 - \sin(s/2),\ 1-\cos(s/2),\ s/2 + \sin(s/2),\ \cos(s/2))$

$\tilde{X}'(s) = (1/2 - 1/2\cos s/2,\ \frac{1}{2}\sin(s/2),\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(s/2),\ -\frac{1}{2}\sin(s/2))$.

$\tilde{X}''(s) = (\frac{1}{4}\sin(s/2),\ \frac{1}{4}\cos(s/2),\ -\frac{1}{4}\sin(s/2),\ -\frac{1}{4}\cos(s/2))$

$\vec{K}(\pi/4) = \tilde{X}''(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ — 15점

따라서 $K(\pi/4) = |\vec{K}(\pi/4)| = \frac{\sqrt{2}}{4}$ — 20점

※ (i), (ii) 에서 계산실수가 있는 부분에서는 5점씩 감점.
(예를들어 $|X'(t)|$를 잘못구하거나. $\vec{K}(t)$를 구한후 $t=\pi/4$를 대입하지 않은 경우 등등.
단, 곡률벡터의 정의를 정확히 명시하고 곡률이 곡률벡터의 크기임을 명시한 경우
곡률 계산 부분에서 5점을 준다. 물론 곡률벡터로부터 곡률을 정확히 계산하였을 경우만.)