

수학 및 연습 1 기말고사

(2015년 7월 27일 11:00-13:00)

학번: _____ 이름: _____

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

문제 1. [20점] 다음 세 벡터가 일차독립 혹은 일차종속인지 판별하시오.

$$(1, 0, 1, 2), \quad (0, -1, -1, -2), \quad (1, 1, 1, 3)$$

문제 2. [20점] 크기가 각각 1, 2, 3 인 서로 수직인 벡터 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 와 $x^4 + y^4 + z^4 = 1$ 을 만족시키는 세 실수 x, y, z 에 대하여 $|x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 + z\mathbf{v}_3|$ 의 최댓값을 구하시오.

문제 3. [20점] 다음과 같이 정의된 사상 $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$L(x, y, z) = (2x - y + z, y + 3z, x - 5z)$$

과 \mathbb{R}^3 의 일차독립인 세 벡터 $\mathbf{v}_1 = (1, 3, 3), \mathbf{v}_2 = (3, 1, -2), \mathbf{v}_3 = (-2, -2, 1)$ 가 이루는 평행육면체

$$R = \{r\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2 + t\mathbf{v}_3 \mid 0 \leq r, s, t \leq 1\}$$

에 대하여, $L(R) = \{L(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in R\}$ 의 부피를 구하시오.

문제 4. [20점] 행렬 A 가 다음과 같이 주어졌을 때, 물음에 답하시오.

$$A = \begin{pmatrix} -5 & x & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ x & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) (10점) $\det(A^{2015}) \neq 0$ 일 조건을 구하시오.

(b) (10점) $x = 5$ 일 때 $\det((A^{-1})^t)$ 을 구하시오.

문제 5. [20점] 다음 물음에 답하시오.

(a) (10점) 세 점 $P = (1, -1, 0), Q = (2, 1, -1), R = (-1, 1, 2)$ 를 지나는 평면과 수직이고 점 P 를 지나는 직선의 방정식을 구하시오.

(b) (10점) 세 점 $P = (1, -1, 0), Q = (2, 1, -1), R = (-1, 1, 2)$ 를 꼭지점으로 하는 삼각형의 넓이를 구하시오.

문제 6. [20점] 두 벡터 $\mathbf{a} = (1, 1, 0)$ 과 $\mathbf{b} = (-2, 0, 0)$ 에 대하여 다음과 같이 정의된 사상 $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 이 선형사상임을 보이고, L 을 나타내는 행렬을 구하시오.

$$L(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3)$$

문제 7. [20점] 다음 곡선의 길이를 구하시오.

(a) (10점) $X(t) = \left(\int_1^t \frac{\cos u}{u} du, \int_1^t \frac{\sin u}{u} du \right) \quad (1 \leq t \leq \pi)$

(b) (10점) 극좌표계로 주어진 곡선 $r = \sin^3\left(\frac{\theta}{3}\right) \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$

문제 8. [20점] 매개화된 곡선 $X(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(a) (5점) $t = 0$ 에서 접선의 매개변수방정식을 구하시오.

(b) (5점) $t = 0$ 에서 접촉평면의 방정식을 구하시오.

(c) (10점) 곡선 $X(t)$ 를 점 $X(0)$ 에서부터 켄 호의 길이로 매개화하시오.

문제 9. [20점] 좌표평면의 영역 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$ 에서 데카르트 곡선 $x^3 + y^3 = 3xy$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 극좌표계를 이용하여 구하시오.

문제 10. [20점] 곡률에 관한 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점) 이급 정규곡선 $X(t) \in \mathbb{R}^3$ 에 대하여, 곡률 κ 의 정의로부터

$$\kappa = \frac{|X' \times X''|}{|X'|^3}$$

가 성립함을 증명하시오.

- (b) (10점) 곡선 $X(t) = (\log(1+t), \sinh t, \cosh t)$ 에서 $t = 0$ 일 때의 곡률을 구하시오.