<2011년 여름 계절학기 수학 및 연습 1 기말고사>

1. (a) 구하고자 하는 평면의 법선벡터는

$$(4,-3,2)\times(3,2,-1) = (-1,10,17)$$

+5점.

∴ 원하는 평면의 방정식은

$$-(x-6)+10(y-2)+17(z+1)=0$$

$$\Rightarrow -x+10y+17z+3=0.$$

+5점.

(b) $\dfrac{7-x}{5} = y+1 = 1-z = t$

$$\Rightarrow x=-5t+7,\ y=t-1,\ z=-t+1. \quad \cdots (*)$$

이걸 (a)번에서 구한 평면의 방정식에 대입하면,

$$-(-5t+7-6)+10(t-1-2)+17(-t+1+1)=0. \Rightarrow t=\frac{3}{2}$$

이렇게 구한 t값을 주어진 직선의 매개변수방정식 $(*)$에 대입하면. +5점.

$$x=-\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{2},\ z=-\frac{1}{2}.$$

∴ 답: $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$

+5점.

제2)

투사된 빛의 방향은 원점에서 시작하므로 $\mathbb{V} = (0, 1, \frac{\pi}{2})$ 이다

투사된 빛이 나선에서 만나는 점은 $X(\frac{\pi}{2})$이고 이때 접평면의 수직벡터 $\mathbb{n}$은

$\mathbb{n} = X'(\frac{\pi}{2}) \times X''(\frac{\pi}{2}) = (-1, 0, 1) \times (0, -1, 0) = (1, 0, 1)$ 이다

$X(\frac{\pi}{2})$ 점의 접평면에 $\mathbb{V}$의 반사벡터 $\mathbb{V}^* = \mathbb{V} - 2\frac{\mathbb{n}\cdot\mathbb{V}}{\mathbb{n}\cdot\mathbb{n}}\mathbb{n} = (0, 1, \frac{\pi}{2}) - \frac{\pi}{2}(1, 0, 1)$

$= (-\pi/2, 1, 0)$ 이다.

반사된 빛은 $X(\frac{\pi}{2}) = (0, 1, \pi/2)$ 에서 $\mathbb{V}^* = (-\pi/2, 1, 0)$ 방향으로 진행되므로

이 직선의 방정식 $\ell(t) = (-\pi/2, 1, 0)t + (0, 1, \pi/2)$ 이다.

$\ell(t)$ 가 $x = -4$ 평면과 만나는 점은 $-\frac{\pi}{2}t = -4 \Rightarrow t = \frac{8}{\pi}$ 일때이다

$\ell(\frac{8}{\pi}) = (-4, 1 + \frac{8}{\pi}, \frac{\pi}{2})$ 이다.

※ $\mathbb{n}$을 제대로 구하면 5점

반사벡터 $\mathbb{V}^*$를 제대로 구하면 5점 ($-\mathbb{V}^*$로 구해도 정답)

직선의 방정식을 제대로 구하면 5점 ($\frac{x}{-\pi/2} = y - 1$; $z = \frac{\pi}{2}$ 라 써도 정답)

$x = -4$ 평면과 만나는 점을 구하면 5점

#3.

$\overrightarrow{PQ} = (3,2,0) - (1,0,-1) = (2,2,1)$

$\overrightarrow{PR} = (2,4,6) - (1,0,-1) = (1,4,7)$

$\overrightarrow{PS} = (1,1,-1) - (1,0,-1) = (0,1,0)$

$\therefore \mathrm{Vol}(\mathbb{P}) = \left| \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 7 & 1 \end{pmatrix} \right| = |-13| = 13.$ +5점. +5점.

① $\cdots L\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, ② $\cdots L\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}$, ③ $\cdots L\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\5\\1\end{pmatrix}$

식 ②에서 식 ①을 빼면, $L\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$

식 ③에서 식 ①을 빼면, $L\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\therefore$ L의 행렬표현을 A라고 하면, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ +5점.

$\det A = \underline{-12.}$ +5점.

$\therefore \mathrm{Vol}(L(\mathbb{P})) = |\det A| \cdot \mathrm{Vol}(\mathbb{P}) = |-12| \cdot 13 = \underline{156.}$ +5점.

채점기준: 부호를 고려하지 않은 답안은 −5점.

#4.

i) $L(e_1) = (\cos\theta,\ 0,\ -\sin\theta)$

$L(e_2) = (0,\ 1,\ 0)$

$L(e_3) = (\sin\theta,\ 0,\ \cos\theta)$

$$\Rightarrow \quad L_A = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

┘ +15

ii) $T(e_1) = (0,\ 3,\ -2)$

$T(e_2) = (-3,\ 0,\ 1)$

$T(e_3) = (2,\ -1,\ 0)$

$$\Rightarrow \quad T_A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

┘ +10

iii) 선형사상 $L \circ T$ 에 대응하는 행렬은 $L_A \cdot T_A$.

$$\Rightarrow \quad L_A \cdot T_A = \begin{pmatrix} -2\sin\theta & -3\cos\theta + \sin\theta & 2\cos\theta \\ 3 & 0 & -1 \\ -2\cos\theta & 3\sin\theta + \cos\theta & -2\sin\theta \end{pmatrix}$$

┘ +5

<채점기준>

- i) 에서 $L_A = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ +\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$ 으로 표현한 경우는 -10 점.
- L_A, T_A 를 정확하게 계산한 경우에만 iii) 에 해당하는 점수가 있음.

#5. (a) $x'(t) = (\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t, \sqrt{2}t^{\frac{1}{2}})$

$\Rightarrow |x'(t)| = \sqrt{t^2+2t+1} = |t+1|$ 5

$\Rightarrow l = \int_0^{\pi} |x'(t)| dt = \int_0^{\pi} t+1 \, dt = \frac{\pi^2}{2} + \pi$ 5

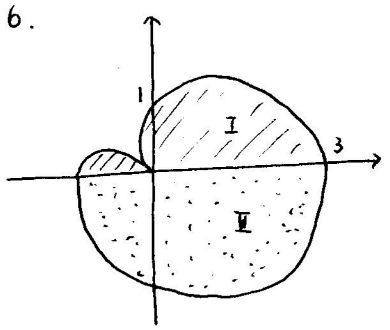
(b) $r^2 = \sec^2\theta$, $(r')^2 = (\sec\theta \tan\theta)^2$

$\Rightarrow \sqrt{r^2+(r')^2} = \sqrt{\sec^2\theta(1+\tan^2\theta)} = \sec^2\theta$ 5

$\Rightarrow l = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{r^2+(r')^2} \, d\theta$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2\theta \, d\theta = [\tan\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1$ 5

#6.



$$(\mathrm{I}) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (1+2\cos\theta)^2\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (1+4\cos\theta+4\cos^2\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left[3\theta + 4\sin\theta + 2\sin 2\theta\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{3}{2}\pi$$ +5

$$(\mathrm{II}) = 2^2\cdot\frac{\pi}{2} = 2\pi$$

$$\therefore\ (\mathrm{I}) + (\mathrm{II}) = \frac{3}{2}\pi + 2\pi = \frac{7}{2}\pi.$$ +5

<채점기준>

- (I) 번의 넓이식만 정확히 쓴 경우 +5점.
- (II) - (I) 으로 넓이를 계산한 경우 -5점.

#17.

$$X'(t) = (\cos 2t,\ \sin 2t,\ -\sin t)$$

$\Rightarrow$ $|X'(t)| = \sqrt{1+\sin^2 t}$ ┘ 10

$\Rightarrow$ 곡률은 $0 \le t \le 2\pi$ 구간에서 $t = \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$ 일때 최댓값을 갖는다.

(i) $X''(t) = (-2\sin 2t,\ 2\cos 2t,\ -\cos t)$ 에서,

$X'(\frac{\pi}{2}) = (-1,\ 0,\ -1)$

$X''(\frac{\pi}{2}) = (0,\ -2,\ 0)$

$\Rightarrow$ $X'(\frac{\pi}{2}) \cdot X''(\frac{\pi}{2}) = 0$ ┘ 5

(ii) $X'(\frac{3}{2}\pi) = (-1,\ 0,\ 1)$

$X''(\frac{3}{2}\pi) = (0,\ -2,\ 0)$

$\Rightarrow$ $X'(\frac{3}{2}\pi) \cdot X''(\frac{3}{2}\pi) = 0$ ┘ 5

#8.

$$\tilde{x}''(s) = \mathbb{K}(t) = \frac{1}{|x'(t)|}\left(\frac{x'(t)}{|x'(t)|}\right)'$$

$\uparrow$ 곡률벡터

$$= \frac{(x'\cdot x')\,x'' - (x'\cdot x'')\,x'}{|x'|^4}.$$

따라서,
$$\mathbb{K}(t)\Big|_{t=\pi} = \frac{1}{(\sqrt{4+\pi^2})^4}\left((\pi^2+4)\,x'' - \pi\,x'\right)$$

$$= \frac{1}{(\pi^2+4)^2}\left(\pi^3+5\pi,\ -\pi^2-8,\ -\sqrt{3}\pi\right).$$

<채점기준>

- $\tilde{x}''(s) = \mathbb{K}(t)$ 임을 알고, 곡률벡터의 식을 정확히 적은 경우 +10점.
  (곡률벡터가 아닌 곡률을 계산한 경우 - 점수 없음).

- $\mathbb{K}(\pi)$를 정확하게 계산한 경우 +15점.

9. $y = \cosh x$. $(-1 \le x \le 1)$

매개화하면, $X(t) = (t, \cosh t)$,

$\Rightarrow X'(t) = (1, \sinh t)$.

$\Rightarrow |X'(t)| = \sqrt{1+\sinh^2 t} = \cosh t$ +5점.

$\therefore \text{length}(X) = l = \int_{-1}^{1} |X'(t)|\,dt = \int_{-1}^{1} \cosh t\,dt$

$= 2\int_0^1 \cosh t\,dt = 2(\sinh t)\Big|_0^1$

$= 2\sinh 1$. +5점.

$\therefore \bar{x} = \frac{1}{l}\int_X x\,ds = \frac{1}{l}\int_{-1}^{1} t\cosh t\,dt = 0$ (∵ 홀함수 적분) +5점.

$\bar{y} = \frac{1}{l}\int_X y\,ds = \frac{1}{l}\int_{-1}^{1}\cosh^2 t\,dt$

$= \frac{1}{2\sinh 1}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+\cosh 2t}{2}\right)dt = \frac{1}{\sinh 1}\int_0^1\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cosh 2t\right)dt$

(∵ 짝함수 적분)

$= \frac{1}{\sinh 1}\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sinh 2t\right)\Big|_0^1$

$= \frac{1}{\sinh 1}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sinh 2\right) = \frac{2+\sinh 2}{4\sinh 1}$ +5점.

$\therefore$ 중심은 $\left(0, \frac{2+\sinh 2}{4\sinh 1}\right)$