

2008년 수학 및 연습1 계절학기 기말고사

2008년 7월 28일 월 11:00-13:00

문제 1 (20점). 다음을 보이시오.

- (a) 좌표공간 \mathbb{R}^3 에서 서로 직교하는 0이 아닌 세 벡터 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 들은 일차독립임을 보이시오.
- (b) 좌표공간 \mathbb{R}^n 에서 v 만큼 평행이동하는 사상 T_v 가 선형사상이면 $v = 0$ 임을 보이시오.
- (c) 가역행렬의 역행렬은 유일함을 보이시오.
- (d) 곡선의 가속도벡터가 속도벡터에 항상 수직이면 속력이 일정한 곡선임을 보이시오.

문제 2 (20점). 구 $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1$ 위의 점들 중에서 점 $(1, -1, -1)$ 와 가장 가까이 있는 점의 좌표를 구하고, 그 점에서 구에 접하는 평면의 방정식을 구하시오.

문제 3 (30점). 차수가 n 인 다항식 전체의 집합을 P_n 이라고 두고, 다항식 $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ 을 벡터 (a_0, a_1, \cdots, a_n) 과 같이 보도록 하자. 사상 T 를 다음과 같이 정의할 때,

$$T : P_n \rightarrow P_{n+1}, \quad p(x) \mapsto \int_1^x p(t) dt + xp(x)$$

- (a) T 가 선형사상임을 보이시오.
- (b) $n = 2$ 일 때 T 에 대응되는 행렬을 구하시오.

문제 4 (30점). 다음과 같이 정의된 사상 $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 과

$$L(x, y, z) = (x + 2y, 2y - z, x - 3z),$$

\mathbb{R}^3 의 서로 일차독립인 세 벡터 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 가 이루는 나란히꼴

$$R = \{r\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2 + t\mathbf{v}_3 \mid 0 \leq r, s, t \leq 1\}$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오.

- (a) L 이 선형사상임을 보이고, 이에 대응하는 행렬 A 를 구하시오.
- (b) 나란한 꼴 R 의 부피 $\text{vol}(R)$ 은 $|\det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)|$ 임을 보이시오.
- (c) 사상 L 에 의한 상 $L(R)$ 에 대하여 $\frac{\text{vol}(L(R))}{\text{vol}(R)}$ 의 값을 구하시오.

문제 5 (20점). 곡선 $X(t) = (e^t, e^{2t}, 1 - e^{-t})$ 위의 점 $(1, 1, 0)$ 에서 접선과 접축평면의 식을 구하시오.

문제 6 (20점). 극좌표로 주어진 곡선 $r = \sin n\theta$ 에서 “한 잎”의 넓이를 구하시오. (단, n 은 자연수이다.)

문제 7 (20점). 구간 $[0, a]$ 에서 정의된 곡선 $X(t) = (-t + 3, \cosh t - 5, 5)$ 를 호의 길이로 매개화 하시오.

문제 8 (20점). 반원판

$$x^2 + y^2 \leq 1, \quad y \geq 0$$

의 경계로 이루어진 곡선의 중심을 구하시오.

문제 9 (20점). 곡선 $X(t) = (t, \log t)$ 에서 곡률이 최대인 점에서의 접축원의 방정식을 구하시오.