2010, 1학기 수학및 연습 1 기말고사

#1.

$$M = |X - P_1|^2 + \cdots + |X - P_k|^2$$

$$= \sum_{i=1}^{k} (X - P_i)\cdot(X - P_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} (|X|^2 - 2X\cdot P_i + |P_i|^2)$$

$$= k\cdot|X|^2 - 2X\cdot(P_1 + \cdots + P_k) + \sum_{i=1}^{k}|P_i|^2$$

$$\Rightarrow \quad |X|^2 - 2X\cdot\left(\frac{1}{k}(P_1+\cdots+P_k)\right) + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}|P_i|^2 = \frac{1}{k}M. \qquad \cdots(1)$$

$$r^2 = |X - Q|^2$$

$$= (X - Q)\cdot(X - Q)$$

$$= |X|^2 - 2X\cdot Q + |Q|^2$$

$$\Rightarrow \quad |X|^2 - 2X\cdot Q + |Q|^2 = r^2. \qquad \cdots(2)$$

(1), (2) 에 의해,

$$Q = \frac{1}{k}(P_1 + \cdots + P_k)$$

$$r^2 - |Q|^2 = \frac{1}{k}\{ M - (|P_1|^2 + \cdots + |P_k|^2) \}$$

$$\Rightarrow \quad r = \sqrt{\frac{M}{k} - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}|P_i|^2 + \frac{1}{k^2}\left|\sum_{i=1}^{k}P_i\right|^2}$$

* 채점기준.

Q : 계산과정, 결과까지 맞는 경우 +10.

(과정없이, 답만 쓴 경우 +5)

r : 계산과정, 결과까지 맞는 경우 +10.

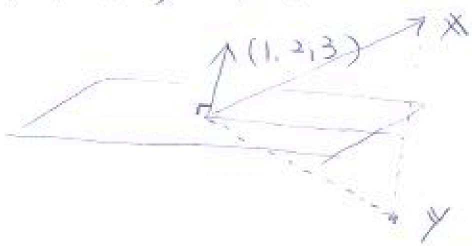
• 계산실수, 벡터 표현 오류 -5.

(예) $\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}|P_i|^2 \rightarrow \frac{1}{k}(P_1^2 + \cdots + P_k^2) \text{ 등으로 표기한 경우.} \\ |X|^2 \rightarrow X^2 \end{array}\right.$

문제 2 - (a)

삼차원 공간에서 평면 $x+2y+3z=0$ 에 대해, 벡터 $\mathbf{X}=(x_1, x_2, x_3)\in\mathbb{R}^3$ 의 대칭점을 $\mathbf{Y}$라 할때, $\mathbf{Y}$를 $\mathbf{X}$로 나타내시오.

풀이1. $(0,0,0)$ 이 주어진 평면 상의 점이다.



$\mathbf{X}$의 $\mathbf{n}=(1,2,3)$ 방향 정사영은 $\dfrac{\mathbf{X}\cdot\mathbf{n}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\mathbf{n}$ 이므로, (*)

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} - 2\frac{\mathbf{X}\cdot\mathbf{n}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\mathbf{n}, \quad \mathbf{n}=(1,2,3) \text{ 이다.}$$

$$= (x_1, x_2, x_3) - 2\frac{(x_1, x_2, x_3)\cdot(1,2,3)}{(1,2,3)\cdot(1,2,3)}(1,2,3)$$

$$= (x_1, x_2, x_3) - \frac{1}{7}(x_1+2x_2+3x_3)(1,2,3)$$

$$= \frac{1}{7}(6x_1-2x_2-3x_3,\ -2x_1+3x_2-6x_3,\ -3x_1-6x_2-2x_3)$$

☒

풀이2. $\mathbf{X}+\mathbf{Y}$ 는 $(1,2,3)$과 수직이고, $\mathbf{X}-\mathbf{Y}$ 는 $(1,2,3)$과 평행하므로,

$$x_1+y_1+2(x_2+y_2)+3(x_3+y_3)=0$$

$$y_1-x_1 = \frac{y_2-x_2}{2} = \frac{y_3-x_3}{3} = k$$ 가 성립한다. ⋯(*)(*)

연립하면, $14k = -(2x_1+4x_2+6x_3)$

$7k = -(x_1+2x_2+3x_3)$ 이고,

$$\mathbf{Y}=(y_1, y_2, y_3) = (x_1, x_2, x_3) - \frac{x_1+2x_2+3x_3}{7}(1,2,3)$$ 이다.

☒

풀이3. 점 $\mathbf{X}=(x_1\ x_2\ x_3)$를 지나고 평면에 수직인 직선 $\mathbf{X}+t(1,2,3)\ \ t\in\mathbb{R}$

이 평면과 만나는 점은 $t=t_0$ 라 하면,

$x_1+t_0+2(x_2+2t_0)+3(x_3+3t_0)=0$ 를 만족한다.

정리하면, $14t_0 = -x_1-2x_2-3x_3$ 이다.

$\mathbf{X}+t_0(1,2,3)$은 $\mathbf{X}$와 $\mathbf{Y}$의 중점이므로.

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + 2t_0(1,2,3) \qquad (***)$$

$$= (x_1, x_2, x_3) - \frac{x_1+2x_2+3x_3}{7}(1,2,3)$$

$$= \frac{1}{7}(6x_1-2x_2-3x_3,\ -2x_1+3x_2-6x_3,\ -3x_1-6x_2-2x_3)$$

를 얻는다. ☒

채점기준 ◦ 대칭점 $\mathbf{y}$를 구하는 방법이 옳으면 - 5점

(풀이 1 ; (*) 까지, 풀이 2 ; (**) 까지, 풀이 3 ; t_0를 바로 찾고 (***) 식을 제대로 쓰는 것 까지)

◦ 나머지 계산 - 5점

#2 - (b) (10점).

풀이 : (a)에 의해서, $L(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\mathbf{n}$. $(\mathbf{n} = (1,2,3))$

임의의 벡터 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, 임의의 실수 c 에 대하여,

$$L(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = (\mathbf{x}+\mathbf{y}) - 2\cdot\frac{(\mathbf{x}+\mathbf{y})\cdot\mathbf{n}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\mathbf{n}$$

$$= \mathbf{x} - 2\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\mathbf{n} + \mathbf{y} - 2\frac{\mathbf{y}\cdot\mathbf{n}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\mathbf{n}$$

$$= L(\mathbf{x}) + L(\mathbf{y}) \quad ,$$

$$L(c\mathbf{x}) = c\mathbf{x} - 2\frac{(c\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\mathbf{n}$$

$$= c\left(\mathbf{x} - 2\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\mathbf{n}\right) = c\,L(\mathbf{x})$$ 이다.

(또는 $L(\mathbf{x}+c\mathbf{y}) = L(\mathbf{x}) + cL(\mathbf{y})$)

기준: 선형 사상 정의를 아는 경우 6점,

계산 과정까지 모두 맞으면 총 10점.

#2 (c).

(a)에 의해,

$L(e_1) = \left(\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}\right)$

$L(e_2) = \left(-\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, -\frac{6}{7}\right)$

$L(e_3) = \left(-\frac{3}{7}, -\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}\right)$

$\therefore$ 답: $\begin{pmatrix} \frac{6}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{6}{7} \\ -\frac{3}{7} & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$

※

(a)에서 틀려서 답이 틀린 경우 −5점
(단, 맞게 구한 경우)

그외 , 0 점.

#3. $aT(u)+bT(v)+cT(w)=0$ 이라 가정하자 $(a,b,c \in \mathbb{R})$

T가 선형사상이므로,

$$T(au+bv+cw)=0$$

가정에 의해, $au+bv+cw=0$.

u,v,w가 일차독립이므로, $a=b=c=0$.

$\therefore$ $T(u), T(v), T(w)$는 일차 독립.

* 논리적인 순서가 맞지 않으면 0점.

det, 역행렬, 외적 사용한 경우 0점.

대우 증명한 경우, 가정에서 일차결합의 계수가 모두 0이 아니라고 한 경우 — 5점

#4. $(-1)^n \det(-I+2A-A^2)$

$= (-1)^n \det(-I(A^2-2A+I))$

$= (-1)^n \det(-I)\det(A^2-2A+I)$

$= (-1)^n \det(-I)\det((A-I)^2)$) 10점

I가 n차 단위 행렬이면 $\det(-I)=(-1)^n$ 이므로

$= (-1)^{2n} \det((A-I)^2)$

$= (\det(A-I))^2 \geq 0$

) 20점

※ 짝수, 홀수인 경우로 나누어서

한 가지 경우만 풀면 10점

수학적 귀납법으로

풀면 0점

#5.

$$\det A = \det\begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} = 4$$

5점

$$\left.\begin{aligned} \det((A^{1005})^t) &= \det(A^{1005}) \quad (\because \det A^t = \det A) \\ &= (\det A)^{1005} \quad (\because \det AB = \det A \det B) \end{aligned}\right\} ①$$

10점

$$= 4^{1005}$$

$$(= 2^{2010})$$

15점

(*) 답을 옮겨적는 과정에서 실수한 경우 −2점

ex) $4^{1005} = 2^{2005}$

(*) ① 에 대한 언급 없이 답을 도출한 경우 −5점.

6. $X(t) = \left(\int_1^t e^{u^2} du, \int_0^{\frac{\pi}{2}t} \cos u \, du, \int_0^{\log t} e^u du \right) \times (t, 1, 1)$

$X(1) = (0, 1, 0) \times (1, 1, 1) = (1, 0, -1)$

┘ 5점

$X'(t) = \left(e^{t^2}, \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} t, 1\right) \times (t, 1, 1)$

$\quad + \left(\int_1^t e^{u^2} du, \int_0^{\frac{\pi}{2}t} \cos u \, du, \int_0^{\log t} e^u du \right) \times (1, 0, 0)$

$X'(1) = (e, 0, 1) \times (1, 1, 1) + (0, 1, 0) \times (1, 0, 0)$

$\quad = (-1, 1-e, e-1)$

┘ 10점

┘ (*)

$\therefore \ l(s) = (1, 0, -1) + s(-1, 1-e, e-1) \quad s \in \mathbb{R}$

┘ 5점

※ 채점기준

$X'(t)$를 잘못계산한 경우 $X'(1)$이 맞더라도 점수없음.

(*) 까지 맞았을 경우만 마지막 $l(s)$에 대한 점수를 받을수 있음.

문제 7. 데카르트 곡선 $x^3 + y^3 = 3xy$ $(x, y \geq 0)$

에 대해 다음에 답하시오.

(a) 극좌표계를 써서 데카르트 곡선을 $r = f(\theta)$ 꼴로 나타내시오.

$x = r\cos\theta$ $y = r\sin\theta$ 로 놓으면

$r^3(\cos^3\theta + \sin^3\theta) = 3r^2 \cos\theta \cdot \sin\theta$ 이고.

$r \neq 0$ 일때

$$r = \frac{3\cos\theta \cdot \sin\theta}{\cos^3\theta + \sin^3\theta} \qquad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

(θ 범위 내에서는 분모가 0 이 되지 않는다.)

$\theta = 0, \frac{\pi}{2}$ 인 경우에 $r = 0$ 일 때를 포함하므로

$$r = \frac{3\cos\theta \cdot \sin\theta}{\cos^3\theta + \sin^3\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

가 된다.

#7-(b).

$$넓이 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(\theta))^2\, d\theta \quad \text{———} ①$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3\cos\theta\sin\theta}{\cos^3\theta+\sin^3\theta}\right)^2 d\theta \quad \text{———} ②$$

$$= \frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2\theta \cdot \tan^2\theta}{(1+\tan^3\theta)^2}\, d\theta$$ 분자, 분모를 $\cos^6\theta$ 로 나눈다.

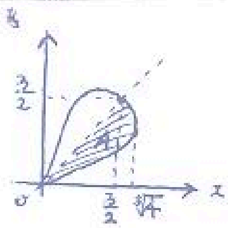
$$= \frac{3}{2}\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+t)^2}\, dt$$ $t = \tan^3\theta$.

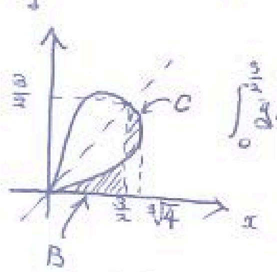
$$= \frac{3}{2}\left[-\frac{1}{1+t}\right]_0^{\infty} \quad \text{———} ③$$

$$= \frac{3}{2}.$$

- ①번 공식을 범위까지 정확히 썼으면 5점.
- ①번 식을 적지 않았을 경우, ②번식에서 $f(\theta)$를 정확히 명시했을 경우 5점.
- 꼭 $\tan^3\theta$로 치환하지 않았더라도 답을 유도할 수 있는 ③번과 유사식을 유도했을 경우 10점.
- 답까지 정확히 구했으면 15점.

<별해>





$\int_0^{\frac{3}{2}} y\,dx = B - C$

$A = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2 + C - B$

$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \int_0^{\frac{3}{2}} y\,dx$

$$x(t) = \frac{3t}{1+t^3}, \quad y(t) = \frac{3t^2}{1+t^3}$$

$$A = \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{4} - \int_0^1 y(t)\,\frac{dx}{dt}\cdot dt$$ 5점.

$$= \frac{9}{8} - \int_0^1 \frac{3t^2}{(1+t^3)}\cdot\frac{3-6t^3}{(1+t^3)^2}\, dt$$ Let $1+t^3 = s$.

$$= \frac{9}{8} - 3\int_1^2 \frac{3-2s}{s^3}\, ds$$

$$= \frac{9}{8} - 3\cdot\left[-\frac{3}{2s^2} + \frac{2}{s}\right]_1^2$$ 10점

$$= \frac{9}{8} - 3\left(\frac{9}{8} - 1\right) = \frac{3}{4}.$$

- $y = x$ 대칭이므로 넓이 $= 2\times A = \frac{3}{2}$ 15점.

* 별해와 유사 답안의 경우에도 동일한 채점기준을 적용하여 채점하였음.

8. $X'(t) = (e^t\cos t - e^t\sin t,\ e^t\sin t + e^t\cos t)$

$|X'(t)| = \sqrt{2}\, e^t$

길이 $l = \int_0^{2\pi} |X'(t)|\, dt = \sqrt{2}(e^{2\pi}-1)$ 10점

중심의 x좌표 $\bar{x} = \frac{1}{l}\int_X x\, ds$ 5점

$= \frac{1}{l}\int_0^{2\pi} e^t\cos t \cdot \sqrt{2}e^t\, dt$

$= \dfrac{\frac{2\sqrt{2}}{5}(e^{4\pi}-1)}{\sqrt{2}(e^{2\pi}-1)} = \frac{2}{5}(e^{2\pi}+1)$ 10점

※ 중심의 x좌표를 $\bar{x} = \int_X x\, ds = \frac{2\sqrt{2}}{5}(e^{4\pi}-1)$ 로

적은 경우 10점

※ $\frac{1}{l}\int_X x\, ds$ 에서 $\int_X x\, ds$ 계산 후

l 로 나누지 않은 경우 20점

#9 (a)

곡률벡터 $\kappa = \frac{1}{|X'|}\left(\frac{X'}{|X'|}\right)'$ 」5점

$$= \frac{1}{|X'|}\cdot\frac{|X'|\cdot X'' - \left(\frac{d}{dt}|X'|\right)\cdot X'}{|X'|^2}$$

그런데, $\frac{d}{dt}|X'| = \frac{1}{2|X'|}\frac{d}{dt}(X'\cdot X') = \frac{X'\cdot X''}{|X'|}$ 이므로, 」10점

$$\kappa = \frac{|X'|\cdot X'' - \left(\frac{X'\cdot X''}{|X'|}\right)\cdot X'}{|X'|^3}$$

이제

$$|\text{분자}|^2 = \left\{|X'|\cdot X'' - \left(\frac{X'\cdot X''}{|X'|}\right)X'\right\}\cdot\left\{|X'|\cdot X'' - \left(\frac{X'\cdot X''}{|X'|}\right)X'\right\}$$

$$= |X'|^2\cdot|X''|^2 - 2(X'\cdot X'')^2 + \frac{(X'\cdot X'')^2}{|X'|^2}\cdot|X'|^2$$

$$= |X'|^2\cdot|X''|^2 - (X'\cdot X'')^2$$

(*)

따라서

곡률 $\kappa = |\kappa| = \frac{\sqrt{|X'|^2|X''|^2 - (X'\cdot X'')^2}}{|X'|^3} = \frac{|X'\times X''|}{|X'|^3}$ 」20점

※ · (*) 부분에 대한 구체적인 계산이 있어야 만점을 받을 수 있습니다. 기타 부분 점수 없음.

· 계산 및 표기법 오류 −5점.

9. (b). $X'(t) = (3e^{t}, \sqrt{6}, -e^{-t})$

$X''(t) = (3e^{t}, 0, e^{-t})$] 3점.

$X'(0) = (3, \sqrt{6}, -1)$

$X''(0) = (3, 0, 1)$

$\Rightarrow X'(0) \times X''(0) = (\sqrt{6}, -6, -3\sqrt{6})$] 2점.

(*) (a)의 공식에 대입하면

$$K(0) = \frac{\sqrt{6+36+54}}{(\sqrt{16})^3} = \frac{\sqrt{6}}{16}$$

10점.

(*) 에서 계산실수시 (−2).

※ (a)의 공식 대신, 곡률 벡터를 직접 구한 경우

곡률벡터 식을 올바르게 구하면 5점,

곡률벡터 값을 올바르게 구하면 8점,

곡률을 올바르게 구하면 10점.