

수학 및 연습 1 기말고사

2005년 7월 22일 11시 - 13시

학번:

이름:

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오.(총점 200점).

1. (20점) 3차원 공간에 세 점 $A(1, 3, 4)$, $B(1, -1, 0)$, $C(2, 1, 5)$ 가 주어져 있다.

(a) 이 세 점을 포함하는 평면의 방정식을 구하여라.

(b) 이 세 점과 원점을 꼭지점으로 갖는 사면체의 부피를 구하여라.

2. (25점)

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

에 대해 A , B , $2A$, AB , A^{-1} 의 행렬식을 구하여라.

3. (20점) 벡터 $\mathbf{a} = (1, 0, 2)$ 에 대해 사상 $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 이 다음과 같이 정의되었을 때, L 이 선형사상임을 보이고 L 에 대응되는 행렬을 구하여라.

$$L(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{a})$$

4. (a) (10점) \mathbb{R}^n 상의 벡터 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ 에 대해 $\det(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) \neq 0$ 이면 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ 은 일차독립임을 보여라.

(b) (10점) 서로 다른 세 실수 a, b, c 에 대해 다음 세 벡터가 일차독립임을 보여라.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ b^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ c^2 \end{pmatrix}$$

5. (30점) 다음중 참인 것을 모두 고르시오.(답만 쓰시오.)

(a) 선형사상 $L: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ 에 대해 $L(1, 0, 0, 0, -1) = \mathbf{0}$ 이면 L 은 일대일 함수가 아니다.

(b) \mathbb{R}^3 상의 임의의 세 벡터 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 에 대해 $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \det(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a})$

(c) 두 3차원벡터 \mathbf{a}, \mathbf{b} 에 대해 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ 이면 \mathbf{a} 와 \mathbf{b} 는 일차독립이다.

(d) 일급곡선 $X: [1, 5] \rightarrow \mathbb{R}^3$ 이 호의 길이로 매개화 되었다면 곡선의 길이는 4이다.

(e) 일급곡선의 중심은 재매개화에 대하여 불변이다.

(f) 곡선의 속력과 가속력은 재매개화에 불변이다.

6. (30점) 곡선 $X(t) = (\sqrt{2}t, \sqrt{2}t, 1 - t^2)$ 가 주어져 있다.

(a) $t = 0$ 에서의 접선의 식을 구하여라.

(b) $t = 0$ 에서의 접촉평면의 방정식을 구하여라.

(c) 점 $(0, 0, 1)$ 에서 점 $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ 까지의 곡선 $X(t)$ 의 길이를 구하여라.

7. (20점) (a) 정규곡선 $X(t)$ 가 원점이 중심인 구면 위에 놓여 있으면 속도벡터 $X'(t)$ 와 위치벡터 $X(t)$ 는 항상 수직임을 보

(b) 정규곡선 $Y(t)$ 의 가속도벡터가 속도벡터에 항상 수직이면 속력이 일정함을 보여라.

8. (20점) (a) 정규곡선 $X(t) \in \mathbb{R}^3$ 에 대하여 다음을 보여라. (κ 는 곡률)

$$\kappa = \frac{|X' \times X''|}{|X'|^3}$$

(b) 곡선

$$X(t) = \left(\int_0^t \cos \frac{u^2}{2} du, \int_0^t \sin \frac{u^2}{2} du, t \right)$$

의 곡률을 구하라.

9. (15점) 극좌표계에서 다음 식으로 주어진 영역의 개형을 그리고 1사분면에서의 그 넓이를 구하여라.

$$1 \leq r \leq 2 \sin 2\theta$$