2009년 하계 계절학기
수학 및 연습 1

#1.

(a) (10점) 두 평면이 이루는 각의 크기와 두 평면의 법선벡터끼리 이루는 각의 크기는 동일.

$x+y+z=1$ 의 법선벡터 $(1,1,1)$

$x-2y+3z=1$ 의 법선벡터 $(1,-2,3)$

두 벡터 $\vec{a}=(1,1,1)$, $\vec{b}=(1,-2,3)$ 이 이루는 각의 크기를 θ 라 놓으면

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{1-2+3}{\sqrt{3}\sqrt{14}} = \frac{2}{\sqrt{42}}$$

$$\therefore \theta = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{42}}\right)$$

* 채점기준 : 계산실수 (−5)

(b) (10점) ① 두 평면을 연립하면

$$\begin{array}{rl} & x+y+z=1 \\ - & x-2y+3z=1 \\ \hline & 3y-2z=0 \end{array} \Rightarrow z=\frac{3}{2}y$$

$$\begin{array}{rl} & 2x+2y+2z=2 \\ + & x-2y+3z=1 \\ \hline & 3x+5z=3 \end{array} \Rightarrow z=\frac{3(x-1)}{-5}$$

$$\therefore \frac{x-1}{-5} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$$ 교선의 방정식. (사소한 계산 실수 한번은 −5)

② 교선의 방향벡터는 두 평면의 법선벡터에 수직이므로

$(1,1,1)\times(1,-2,3) = (5,-2,-3)$

$x+y+z=1$, $x-2y+3z=1$ 의 한 교점 $(1,0,0)$ 을 지나므로

$$\therefore \frac{x-1}{5} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{-3}$$ (외적 계산 실수시 −5)

#2. (a) $(13, 14, 15, 16) = (5, 6, 7, 8) + (9, 10, 11, 12) - (1, 2, 3, 4)$ 이므로

일차종속.

* det를 이용하여 계산해도 OK!

(b) $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = 1(25-6) - 2(10-2) + 8(6-5)$

$= 11 \neq 0$ 이므로 일차독립.

* $a(1,2,1) + b(2,5,3) + c(8,2,5) = 0$ 의 해가 자명하다는 것을 이용해도 OK!

* det 계산이 틀린 경우 0점.

#3. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$T(x,y,z) := \det \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = -3x + 6y - 3z.$$

(a) T는 선형 사상.

$$T(x_1,y_1,z_1) + T(x_2,y_2,z_2) = (-3x_1 + 6y_1 - 3z_1) + (-3x_2 + 6y_2 - 3z_2)$$

$$= -3(x_1+x_2) + 6(y_1+y_2) - 3(z_1+z_2)$$

$$= T(x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1+z_2)$$

$$T(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = -3\alpha x_1 + 6\alpha y_1 - 3\alpha z_1$$

$$= \alpha(-3x_1 + 6y_1 - 3z_1) = \alpha T(x,y,z) \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

* det의 선형을 이용하여 보여도 OK.

(b) T에 대응하는 행렬.

$T(\vec{e_1}) = -3$. $T(\vec{e_2}) = 6$. $T(\vec{e_3}) = -3$.

$\therefore$ 행렬 $= (-3 \quad 6 \quad -3)$.

* 계산 실수시 5점 감점.

* 1×3 행렬이 아닌 경우 0점!

문제 4.

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix} = acb + bac + bac - a^3 - b^3 - c^3$$

→ 10점

$$= -(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$$

$$= -(a+b+c)(a^2+b^2+c^2 - ab - bc - ca).$$

→ 20점

문제 5.

선형사상 L 에 대응하는 행렬 $\hat{L} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$ ┘ 5점.

$$\det \hat{L} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{bmatrix}$$

$$= (b-a)(c^2-a^2) - (c-a)(b^2-a^2) = (b-a)(c-a)\{c+\cancel{a}-b-\cancel{a}\}$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b) = (a-b)(b-c)(c-a)$$

┘ 5점.

$\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1)$ $\overrightarrow{AC} = (2, 4, 6)$ $\overrightarrow{AP} = (0, 2, 2)$

이므로 $vol(p) = \left| \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 2 \end{bmatrix} \right|$

┘ 5점.

$$= |8 + 4 - 12 - 4| = 4.$$

┘ 5점.

$$\therefore \ vol(L(p)) = |\det \hat{L}| \cdot vol(p)$$

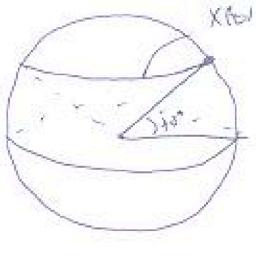
$$= 4\,|(a-b)(b-c)(c-a)|$$

┘ 5점.

※ 채점기준.

$L(\overrightarrow{AB})$, $L(\overrightarrow{AC})$, $L(\overrightarrow{AP})$ 계산 후, $vol(L(p))$를 $|\det(L(\overrightarrow{AB}), L(\overrightarrow{AC}), L(\overrightarrow{AP}))|$로 구한 경우 계산 틀리면 5점.

문제 6 (a)



구면좌표계로 보면

$\varphi = 60°$, $\rho = 6400$ 인 경우임. $\left(\frac{3}{4}\pi \le \theta \le \frac{7}{4}\pi\right)$

$X(t) = 6400\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t,\ \frac{1}{2}\right)$ $\frac{3}{4}\pi \le t \le \frac{7}{4}\pi$ 5점

$X'(t) = 6400\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t,\ 0\right)$ $\therefore |X'(t)| = 3200\sqrt{3}$

$\therefore$ 길이 $= \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{7}{4}\pi} 3200\sqrt{3}\, dt = 3200\sqrt{3}\cdot\left(\frac{7}{4}\pi - \frac{3}{4}\pi\right)$

$= 3200\sqrt{3}\,\pi$

10점

※ 채점 기준

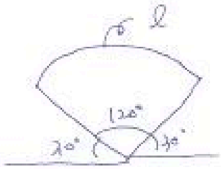
이외의 풀이는 완벽한 경우 10점 아니면 0점

만일  로 각을 잘못 잡는 경우 (북극을 북위 0°로 본 경우)

완벽한 풀이시 5점

문제 6 (b)

두 지점을 잇는 최단거리는 북극을 지나는 대원호이다.

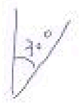


이므로 $l = 6400 \times 2\pi \times \frac{120^\circ}{360^\circ}$

$= \frac{12800}{3}\pi$

10점

※ 채점기준

만일 

로 각을 잘못 잡는 경우 완벽한 풀이시 5점

문제 7. 곡선 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1 \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$

의 중심을 구하여라.

sol) 우선 곡선의 길이를 구하기 위해 주어진 곡선을 매개화 하면.

$$X(\theta) = (\cos^3\theta, \sin^3\theta) \qquad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$X'(\theta) = (3\cos^2\theta(-\sin\theta), 3\sin^2\theta \cdot \cos\theta)$$

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |X'(\theta)|\, d\theta = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^4\theta \cdot \sin^2\theta + \sin^4\theta \cdot \cos^2\theta}\, d\theta$$

+5

$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin\theta \cdot \cos\theta|\, d\theta = \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta \, d\theta$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\left[-\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}.$$ +5

이제 곡선의 중심을 구하면.

$$\bar{x} = \frac{1}{l}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta \, 3|\sin\theta \cdot \cos\theta|\, d\theta = \frac{3}{l}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta \cdot \sin\theta \, d\theta.$$

+5

$\cos\theta = t$ 로 치환하면 $-\sin\theta\, d\theta = dt.$

$$= \frac{3}{l}\int_1^0 t^4 (-dt) = \frac{3}{l}\int_0^1 t^4\, dt = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}.$$

위 곡선은 $y = x$ 에 대해서 대칭이므로.

$\bar{x} = \bar{y} = \frac{2}{15}.$ 즉 $\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$ 가 곡선의 중심이 된다.

각각 +5점씩

문제 8　　$y=\frac{1}{2}\cosh 2x$ 의 $(0, \frac{1}{2})$ 에서 곡률과 접촉원의 방정식.

sol) 현수선이 $\mathbb{R}^3$ 에 있다고 가정하고 곡률을 구하여도 무방하다.

따라서 다음과 같이 매개화 할 수 있다.

$$X(t) = (t, \tfrac{1}{2}\cosh 2t, 0)$$

$$X'(t) = (1, \sinh 2t, 0), \quad |X'(t)| = \sqrt{1+\sinh^2 2t} = \cosh 2t.$$

$$X''(t) = (0, 2\cosh 2t, 0)$$

$$|X'(t)\times X''(t)| = |(0, 0, 2\cosh 2t)| = 2\cosh 2t$$

곡률 $$K\Big|_{t=0} = \underbrace{\frac{|X'\times X''|}{|X'|^3}\Big|_{t=0}}_{5점} = \frac{2\cosh 2t}{(\cosh 2t)^3}\Big|_{t=0} = 2$$

따라서 접촉원의 반지름은 $\frac{1}{2}$ 임을 알 수 있고,

$$\mathbb{K} = \underbrace{\frac{1}{|X'|}\frac{d}{dt}\left(\frac{X'}{|X'|}\right)}_{5점} = \frac{1}{\cosh 2t}\frac{d}{dt}\left(\frac{(1, \sinh 2t)}{\cosh 2t}\right) = \left(\frac{-\sinh 2t}{\cosh^3 2t}\cdot 2, \frac{2}{\cosh^3 2t}\right)$$

$$\mathbb{K}\Big|_{t=0} = (0, 2)$$

이로부터 접촉원의 중심은 $(0, \frac{1}{2})$ 로부터 $(0, 2)$ 방향에 있음을 알 수 있고

$$(\text{접촉원 중심}) = X(t_0) + \frac{\vec{K}(t_0)}{K(t_0)^2}$$

$x^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{4}$ 가 된다.

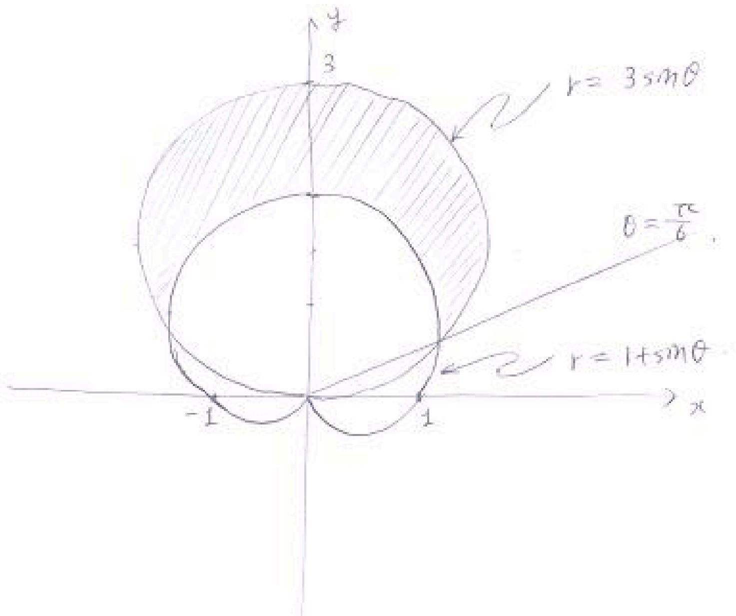
- 곡률 혹은 곡률벡터의 공식을 명확히 기재하면 +5
- 곡률을 정확히 계산하면 +5.
- 접촉원 중심과 반지름을 정확히 기재하면 +5
- 접촉원을 정확히 구하면 +5.

* 접촉원의 중심을 그래프의 개형으로 추측한 경우 −5

문제 9

(a) "$r = 3\sin\theta$" 의 내부, "$r = 1+\sin\theta$" 의 외부. 공통영역 넓이

sol) 그래프의 개형은 다음과 같다.



교점을 알기 위해,

$$3\sin\theta = 1+\sin\theta$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} \quad \left(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right)$$

+5

빗금친 부분의 넓이 $S = 2\left[\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(3\sin\theta)^2 - \frac{1}{2}(1+\sin\theta)^2 \, d\theta\right]$ +5

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 9\sin\theta^2 - 1 - 2\sin\theta - \sin^2\theta \, d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (4 - 4\cos 2\theta - 1 - 2\sin\theta)\, d\theta$$

$$= \Big[3\theta - 2\sin 2\theta + 2\cos\theta\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 3\cdot\frac{\pi}{3} - 2\left(0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\left(0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi.$$ +5

9.(b)

두 곡선을 각각 $X(\theta)$, $Y(\theta)$ 로 매개화 하면,

$$X(\theta) = (3\sin\theta\cos\theta,\ 3\sin^2\theta)$$

$$Y(\theta) = (\cos\theta + \cos\theta\sin\theta,\ \sin\theta + \sin^2\theta)$$

$$X'(\tfrac{\pi}{6}) = (3\cos^2\theta - 3\sin^2\theta,\ 6\sin\theta\cos\theta)\Big|_{\theta=\frac{\pi}{6}}$$

$$= \left(\frac{3}{2},\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \quad \cdots \quad 5점.$$

$$Y'(\tfrac{\pi}{6}) = (-\sin\theta - \sin^2\theta + \cos^2\theta,\ \cos\theta + 2\sin\theta\cdot\cos\theta)\Big|_{\theta=\frac{\pi}{6}}$$

$$= (0,\ \sqrt{3}) \quad \cdots \quad 5점.$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\cdot(0, \sqrt{3})}{\left|\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\right|\ \left|(0,\sqrt{3})\right|} = \frac{\frac{9}{2}}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$\cdots$ 5점.