1 (a). 교선의 방향벡터는 두 평면의 법선벡터 (1, 1, -1), (3, -4, 5) 모두와 수직이므로 $(1,1,-1)\times(3,-4,5) = (1, 8, -7)$

$(2, 0, 0)$이 두 평면의 교점이므로 직선의 방정식은

$$x-2 = \frac{y}{-8} = \frac{z}{-7}$$ ⌋ (1)

· 평면 사이의 각은 법선벡터 사이의 각과 같으므로

$$\cos\theta = \frac{-3}{\sqrt{3}\sqrt{50}} = -\frac{\sqrt{6}}{5}$$

$$\therefore \sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{\frac{19}{25}} = \frac{\sqrt{19}}{5}$$ ⌋ (2)

* (1) (2) 독립적으로 5점씩

(b) 구하고자 하는 직선의 방향벡터는

(a)에서 구한 직선의 방향벡터 $(1, -8, -7)$,

주어진 평면의 법선벡터 $(4, -3, 4)$ 모두와 수직이므로

$(1, -8, -7)\times(4, -3, 4) = (-53, -32, 29)$가 된다.

$(2, 0, 0)$를 지나므로 직선의 방정식은

$$\frac{x-2}{-53} = \frac{y}{-32} = \frac{z}{29}$$

* (a)가 맞아서 답을 정확하게 구해야 15점.
* 방향벡터를 구하는 과정이 좋으면 ((a)가 틀려도) 5점
* 지나는 점과 방향벡터를 이용해 직선의 방정식을 정확히 구하면 5점

#2.

$X+Y-3Z = \frac{1}{2}(2X-Z) + \frac{1}{2}(2Y-5Z)$ 이므로,

주어진 세 벡터는 "일차종속" ⌟ +20점

※ 부분점수 없음.

#3. i) T: 선형사상.

· $T(a_1+b_1x + a_2+b_2x) = T(a_1+a_2+(b_1+b_2)x)$

$= \left(\int_0^1 (a_1+a_2+(b_1+b_2)x)\,dx,\ a_1+a_2\right)$

$= \left(\int_0^1 (a_1+b_1x)\,dx,\ a_1\right) + \left(\int_0^1 (a_2+b_2x)\,dx,\ a_2\right)$

$= T(a_1+b_1x) + T(a_2+b_2x)$

· $T(k(a+bx)) = T(ka+kbx)$

$= \left(\int_0^1 (ka+kbx)\,dx,\ ka\right)$

$= k\left(\int_0^1 (a+bx)\,dx,\ a\right)$

$= k\,T(a+bx)$, $k\in\mathbb{R}$.

ii) 선형사상에 대응하는 행렬.

$T(a+bx) = \left(\int_0^1 (a+bx)\,dx,\ a\right) = \left(a+\frac{1}{2}b,\ a\right)$ 이므로,

대응하는 행렬은 $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

※ 채점기준.

i) 선형사상임을 보이면, +15점.
(두 조건 중 하나를 빠뜨린 경우 −5점.)

ii) 대응하는 행렬, +10점.

4. 벡터 (1, 2, 2)에 대한 정사영

$$P_a(b) = \frac{a \cdot b}{a \cdot a} a$$

$$T(x, y, z) = \frac{(1, 2, 2) \cdot (x, y, z)}{(1, 2, 2) \cdot (1, 2, 2)} (1, 2, 2)$$

$$= \frac{x + 2y + 2z}{9} (1, 2, 2)$$

$$= \left(\frac{x + 2y + 2z}{9}, \frac{2x + 4y + 4z}{9}, \frac{2x + 4y + 4z}{9} \right)$$

$$T(1, 0, 0) = \frac{1}{9}(1, 2, 2)$$

$$T(0, 1, 0) = \frac{1}{9}(2, 4, 4)$$

행렬 표현은 $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

$$T(0, 0, 1) = \frac{1}{9}(2, 4, 4)$$

10점

2열, 3열이 같으므로 행렬식은 0

20점

※ 행렬 표현이 틀리면 행렬식 점수 없음

※ 행렬식이 0인 이유가 없으면 5점 감점

※ 5.

$X(t) = (e^t \cos t,\ e^t, t)$

$x'(t) = (e^t(\cos t - \sin t),\ e^t, 1)$

$X''(t) = (-2e^t \sin t,\ e^t, 0)$

t가 0 일때 $(1, 1, 0)$ 을 지나므로

$x'(0) = (1, 1, 1)$ $\qquad$ $X''(0) = (0, 1, 0)$ $\qquad$ 10점.

접촉평면.

① $\det \begin{pmatrix} (x-1) & (y-1) & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$

$z - x + 1 = 0$

$\Rightarrow \quad x - z = 1.$

② $x'(0) \times X''(0) = (1,1,1) \times (0,1,0) = (-1, 0, 1)$

접촉평면의 식은

$-(x-1) + z = 0$

$\Rightarrow \quad x - z = 1$

20점.

추가 $\{ (1,1,0) + s(1,1,1) + t(0,1,0) \mid s, t \in \mathbb{R} \}$

#6.

곡선의 길이 $l = \int_0^{4\pi} \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\theta$ 5점

$$= \int_0^{4\pi} \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}\, d\theta$$

$$= \int_0^{4\pi} \sqrt{1 + \sqrt{3}\cos\frac{\theta}{2} + \frac{3}{4}\cos^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta$$

$$= \int_0^{4\pi} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\theta}{2} + 1\right) d\theta$$

$$= 4\pi$$

20점

#17

((풀이 1))

$A(2,0,1)$, $B(3,2,4)$, $C(1,1,-4)$, $D(2,-1,3)$ 에서,

$\overrightarrow{AB}=(1,2,3)$, $\overrightarrow{AC}=(-1,1,-5)$, $\overrightarrow{AD}=(0,-1,2)$.

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$로 이루어진 나란히 꼴의 부피는,

$$|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})| = \left|\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}\right| = 4$$

$\Rightarrow$ 사면체의 부피는 나란히꼴 부피의 $\frac{1}{6}$ 이므로,

답: $4 \times \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

※ 사소한 계산실수 5점감점

나란히꼴의 부피만을 구한 경우 5점부여

나란히꼴의 부피에 $\frac{1}{6}$ 이외의 숫자를 곱한 경우 10점부여

((풀이 2))

사면체의 부피는 $\frac{1}{3}\times$ (밑넓이) $\times$ (높이) 이다.

i) (밑넓이) $= \frac{1}{2}\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right|$

$= \frac{1}{2}\times\left|(-13,2,3)\right| = \frac{1}{2}\sqrt{182}$

ii) (높이) = ($\vec{AB}\times\vec{AC}$ 에 대한 $\vec{AD}$ 의 정사영의 크기)

$$= \left|\frac{(0,-1,2)\cdot(-13,2,3)}{(-13,2,3)\cdot(-13,2,3)}(-13,2,3)\right|$$

$$= \frac{4}{\sqrt{182}}$$

$\Rightarrow$ 답 : $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{182}\times\frac{4}{\sqrt{182}} = \frac{2}{3}$

※ 밑넓이나 높이 구하는 식이 사소하게 틀리면 10점부여

식이 맞지만 , 계산실수한 경우 5점 감점

8. (a) $X'(t) = (1-\cos t,\ \sin t)$.

곡선의 길이 $l = \int_0^{2\pi} |X'(t)|\, dt$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2-2\cos t}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left|2\sin\frac{t}{2}\right| dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 2\sin\frac{t}{2}\, dt \quad \left(\because\ 0 \le \frac{t}{2} \le \pi\right)$$

$$= 8$$

⌟ 5점

$\bar{x}$는 대칭성에 의해 π.

$$\bar{y} = \frac{1}{l}\int_X y\, ds = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} (1-\cos t)\, 2\sin\frac{t}{2}\, dt$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \left(2-2\cos^2\frac{t}{2}\right)\sin\frac{t}{2}\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\cos\frac{t}{2} + \frac{2}{3}\cos^3\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{4}{3}$$

$\therefore$ 곡선의 중심은 $\left(\pi, \frac{4}{3}\right)$

⌟ 15점.

* 곡선의 중심을 구하는 공식을 정확하게 알고 있으면 부분점수 5점.

#8. (b) $\mathbf{X}(t) = (\underbrace{t - \sin t}_{x(t)},\ \underbrace{1 - \cos t}_{y(t)})$, $(0 \le t \le 2\pi)$

곡률 i) $\kappa(t) = \dfrac{1}{|\mathbf{X}'(t)|}\left(\dfrac{\mathbf{X}'(t)}{|\mathbf{X}'(t)|}\right)'$

ii) $\kappa(t) = \dfrac{|x'(t)\,y''(t) - x''(t)\,y'(t)|}{\left((x'(t))^2 + (y'(t))^2\right)^{3/2}}$

iii) $\kappa(t) = \dfrac{|\mathbf{X}' \times \mathbf{X}''|}{|\mathbf{X}'|^3}$

등을 이용하여, 계산하면 $\kappa(t) = \dfrac{1}{4\sin\frac{t}{2}}$.

따라서, $4\sin\frac{t}{2}$ 가 최대일때. 즉 $t=\pi$ 일때 $\kappa(t)$ 가 최소.

$\therefore\ \kappa = \frac{1}{4}$.

$\therefore$ 곡률반경 $= 4$.

* 채점기준.

- i), ii), iii) 등의 식을 이용하여. $\kappa(t) = \dfrac{1}{4\sin\frac{t}{2}}$ 까지 정확히 구한 경우 +10점.

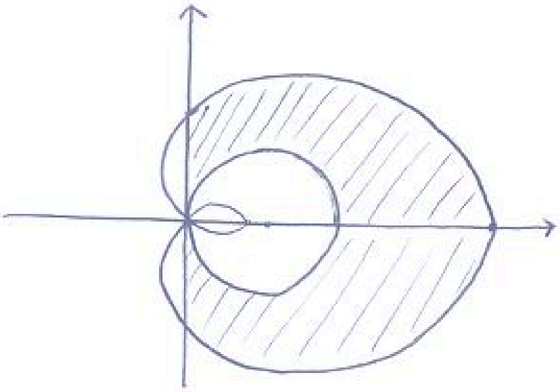
  (단, iii) 식을 이용할때. 곡선 $\mathbf{X}(t)$ 를 $\mathbb{R}^3$상의 벡터로 생각하여,

  $\mathbf{X} = (t - \sin t,\ 1 - \cos t,\ 0)$ 라 두고 계산하지 않은 경우 −5 점.)

- 곡률반경까지 정확히 계산한 경우 +5점.

- 곡률 $\kappa(t) = \dfrac{1}{4\sin\frac{t}{2}}$ 까지 정확하게 계산하지 않은 경우에는 부분점수 없음.

#9.



주어진 영역의 넓이는,

$$\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[(1+\sqrt{2}\cos\theta)^2 - (\sqrt{2}\cos\theta)^2 \right] d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1+2\cos^2\theta + 2\sqrt{2}\cos\theta - 2\cos^2\theta \right] d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+2\sqrt{2}\cos\theta)\, d\theta$$

$$= \left[\theta + 2\sqrt{2}\sin\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2} + 2\sqrt{2}.$$

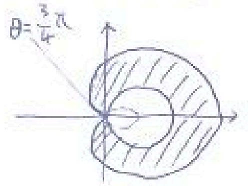
※ 채점기준.

i) 식을 정확히 구한 경우. ($\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[(1+\sqrt{2}\cos\theta)^2 - (\sqrt{2}\cos\theta)^2 \right] d\theta$)

+ 10 점.

ii) 정답까지 정확히 계산한 경우, + 10점.

θ의 구간을 잘못 구한경우 … 0점 처리. (부분점수 없습니다.)

()