

수학 및 연습 1 기말고사

2004년 6월 12일 오후 1시 - 3시

학번:

이름:

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오(총점 200점).

1. (20점) $n \times n$ 행렬 A 가 $A^5 = 0$ 을 만족하면 A 는 역행렬을 갖지 않음을 보여라.

2. $0 \neq v \in \mathbb{R}^3$ 일 때, 사상 $S_v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 을

$$S_v(w) = w - \frac{2v \cdot w}{v \cdot v}v, \quad (w \in \mathbb{R}^3)$$

로 정의하자.

(a) (10점) S_v 는 선형사상임을 보여라.

(b) (10점) $v = (0, 1, 2)$ 일 때 S_v 에 대응되는 행렬을 구하라.

3. 정사각행렬 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ 에 대하여,

(a) (7점) A 의 행렬식을 구하라.

(b) (7점) A 의 전치행렬 A^t 의 행렬식을 구하라.

(c) (6점) A 의 역행렬 A^{-1} 의 행렬식을 구하라.

4. (a) (10점) $A = \begin{bmatrix} x & x^2 & x^3 \\ y & y^2 & y^3 \\ z & z^2 & z^3 \end{bmatrix}$ 의 행렬식을 구하라.

(b) (10점) 매개화된 곡선 $X(t) = (t, t^2, t^3), t \neq 0$, 위의 임의의 서로 다른 세 점은 일직선 상에 있지 않음을 보이라.

5. (20점) 직선 $x = y = z$ 주위로 일정한 각속력 $\sqrt{3}$ 으로 회전하는 동점이 점 $(1, 0, 1)$ 을 지나는 순간의 속력을 구하라.

6. (20점) 나선 $X(t) = (\cos t, \sin t, t)$ 의 점 $(0, 1, \frac{\pi}{2})$ 에서의 접촉평면(osculating plane)의 방정식을 구하라.

7. (20점) 극좌표로 표현된 두 부등식 $r^2 \leq 6 \cos 2\theta$ 와 $r \cos \theta \geq \frac{3}{2}$ 을 동시에 만족하는 영역의 넓이를 구하여라. ($r > 0$ 이라고 가정한다.)

8. (20점) 단위구면 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 과 평면 $z = y + 1$ 의 교선 C 를 따라 철사가 놓여 있다. C 위의 점 (x, y, z) 에서 철사의 밀도함수가 $\mu(x, y, z) = x^2$ 일 때 철사의 질량을 구하여라. (힌트: C 를 xy -평면에 정사영한 타원 $x^2 + 2y^2 + 2y = 0$ 을 매개화하면 C 도 쉽게 매개화 된다.)

9. 포물선 $y = x^2$ 이 주어지 있을때,

(a) (7점) 점 $(1, 1)$ 에서 곡률을 구하여라.

(b) (13점) 점 $(1, 1)$ 에서 접촉원의 방정식을 구하여라.

10. (a) (10점) 반지름 $\frac{1}{4}$ 인 원 A 가 반지름 1인 원 $x^2 + y^2 = 1$ 을 내부에서 접하며 굴러갈 때 A 위의 점 P 의 자취를 X 라고 하자. P 는 점 $(1, 0)$ 에서 출발한다고 가정한다. A 의 중심 C 와 원점을 잇는 직선이 양의 x 축과 이루는 각을 θ 라고 할 때 X 의 매개변수 방정식은 $X(\theta) = (\frac{3}{4} \cos \theta + \frac{1}{4} \cos 3\theta, \frac{3}{4} \sin \theta - \frac{1}{4} \sin 3\theta)$ 임을 보여라.

(b) (10점) 제1사분면 위에 있는 X 의 부분의 길이를 구하여라.