1.

점 P. Q. R 을 지나는 평면을 구하자.

$\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{QR}$ 을 포함하고 이 평면에 수직인 벡터는

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{QR} = (1,1,-2) \times (1,-2,1) = -3(1,1,1)$$

$\Rightarrow$ 평면의 방정식 $(x-1)\cdot 1 + (y-2)\cdot 1 + (z-3)\cdot 1 = 0$

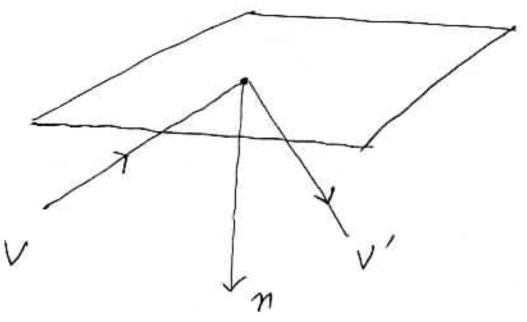
① $\boxed{x+y+z=6}$ − 5점 (평면의 방정식)

반사된 빛의 방향을 V^*, 평면과 수직인 벡터를 $n=(1,1,1)$ 이라 하면

② $V^* = V - 2 \cdot \dfrac{n \cdot V}{n \cdot n} \cdot n = \boxed{-\dfrac{1}{3}(4,1,1)}$ − 5점 (반사된 빛의 벡터)

$V=(0,1,1)$ 방향으로 진행하던 빛이 평면과 만나는 점은

③ $\boxed{X=(0,\ 3.3)}$ − 5점



반사된 빛이 지나가는 직선의 방정식은

$$\frac{x}{4} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-3}{1}$$ 이고

이 직선이 xy 평면과 만나는 점은

$z=0,\quad x=-12,\quad y=0$

∴ 구하려는 점은 ④ $\boxed{(-12,\ 0,\ 0)}$ − 5점

---

①~④ 각 Step 마다 5점.

계산 실수 한번 했을 경우 모든 과정이 맞으면 15점.

계산 실수를 Independent 하게 두 번 이상 했을 경우 0점.

2.(a)

$$T : e_i \longmapsto e_{i+1} \quad (1 \le i \le n-1)$$
$$e_n \longmapsto 0.$$

$$\therefore T = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{n \text{ columns}} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}}\right\} n \text{ rows}$$

$$T = (a_{ij}), \text{ where } a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j+1 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

※ 전치행렬 (b_{ij}), $\left(b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } j = i+1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \right)$ 를 답으로

적으면 0점.

$\boxed{\#2}$ (b)

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}_{n\times n} = (a_{ij}) \qquad \begin{cases} a_{ij} = 1 & \text{if } i=j+1 \\ a_{ij} = 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

$$(I+R+R^2+\cdots+R^{n-1})(I-R) = I-R^n$$

$$\& \ (I-R)(I+R+R^2+\cdots+R^{n-1}) = I-R^n$$

$\boxed{\text{Claim}}$. $R^n = 0$

① $R^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots \quad , R^n = 0$

② $R^n(\vec{x}) = T^n(\vec{x}) = T^n\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = T^{n-1}\begin{pmatrix} 0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \cdots = T\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ a_1 \end{pmatrix} = \vec{0}, \ \forall \vec{x}.$

$\therefore R^n = 0$.

따라서, $I-R^n = I$ & $(I+R+R^2+\cdots+R^{n-1})^{-1} = I-R$.

※ 채점기준.

1. Claim 증명 없이 사용하거나, $R^2=0$ 등 잘못된 이유는 0점.
2. Claim ② 증명에서 $R^n\vec{x} = T^n(\vec{x})$ 이용없이 그냥 $R^n\vec{x}=0$ 으로 쓴경우 증명 인정 X
3. R 대신 (a)에서 R^t 로 구한경우, 모든 과정 맞으면 10점.
4. 일반적인 $n\times n$ 행렬이 아닌 예를 들거나 n에 대한 induction 사용시 0점. (사용불가능)
5. 직접 행렬 구해서 곱한경우, $I+R+R^2+\cdots+R^{n-1}$, $I-R$ 모두 정확히 구해서 계산한 경우 10점.

(c) R은 역행렬을 갖지 않음을 보이시오.

풀이: det $R = 0$ 임을 보여서 R이 역행렬을 갖지 않음을 보이면 된다.

① 행렬 R의 제 1행 (또는 제 n 열)의 성분이 모두 0이므로

행렬식의 성질에 의해서 det $R=0$ 이다.

(또는 R이 하삼각행렬이므로 det R은 대각성분들의 곱이다. 따라서 det $R=0$).

② (b)에서 $R^n = 0$ 임을 알 수 있고, 따라서 ((b)에서 $R^n=0$을 안 보이면 쓸 수 없음)

$(\det R)^n = (\det R^n) = 0$ 이므로

det $R=0$ 임을 구할 수 있다.

채점기준: det $R=0$ 에 대한 근거가 없으면 0점.*)

별해 (귀류법)

: R^{-1} 가 존재한다고 가정하자.

그러면 $I = R^n (R^{-1})^n = O \cdot (R^{-1})^n = O$ 이므로 모순.

∴ R^{-1} 이 존재하지 않는다.

*) i) 근거 없이 det $R=0$ 을 적은 경우

ii) 삼각 행렬이라는 말 없이 대각성분의 곱을 행렬식과 같다고 한 경우.

iii) 대각행렬의 행렬식이 대각 성분의 곱이라는 사실을 말 없이 사용한 경우.

3. Sol 1)

$(t,a,b),\ (a,t,b),\ (a,b,t)$ 가 일차독립

$$\Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} t & a & a \\ a & t & b \\ b & b & t \end{pmatrix} \neq 0$$

⌋ 10

$$\det\begin{pmatrix} t & a & a \\ a & t & b \\ b & b & t \end{pmatrix} = t^3-(a^2+b^2+ab)t+ab(a+b)$$

⌋ 5

$$= (t-a)(t-b)(t+a+b)$$

$\therefore\ t \neq a, b, -a-b$ ⌋ 5

Sol 2) $(t,a,b),(a,t,b),(a,b,t)$ 가 일차독립

$\Leftrightarrow \left[x(t,a,b)+y(a,t,b)+z(a,b,t)=0 \Rightarrow x=y=z=0\right]$

$xt+ay+az=0 \cdots ①$
$xa+ty+bz=0 \cdots ②$
$xb+by+tz=0 \cdots ③$

①+②+③ : $(t+a+b)(x+y+z)=0$

i) $t+a+b=0$

$(x,y,z)=(a^2+2ab,\ a^2+ab+b^2,\ 2ab+b^2)\neq(0,0,0)$ $(\because a\neq b)$
가 해가 되므로 일차 종속. } (*)

ii) $t+a+b\neq 0$

$x+y+z=0$ 을 ① 에 대입하면 $(t-a)x=0$
〃 ③ 에 대입하면 $(t-b)z=0$

$t=a$ 이면 $(t,a,b)=(a,t,b)$; 일차종속
$t=b$ 이면 $(a,b,t)=(a,t,b)$; 일차종속 } (**)

$t\neq a,b$ 이면 $x=y=z=0$

$\therefore\ t\neq a, b, -a-b$

* 일차 종속인 조건을 구하면 0점.
* (*)가 없으면 −5점.
* (**)가 없으면 −10점.

* 정의만 맞은 경우 5점.
* 풀이가 맞아도 정의 표현이 잘못된 경우 −5점.
* 잘못된 정의 (ex) $(t,a,b)=x(a,t,b)+y(a,b,t) \Leftrightarrow$ 일차종속)
등을 이용한 풀이는 0점.

문제 4.

(a) $\det\begin{pmatrix} a+b & 1 & b \\ c+b & 1 & d \\ e+b & 1 & f \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a & 1 & b \\ c & 1 & d \\ e & 1 & f \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{pmatrix}$

$= -\det A = \boxed{-5}$ (5점)

(b) $\det\begin{pmatrix} a & b & 2 \\ c & d & 3 \\ e & f & 4 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 2 \\ e & f & 3 \end{pmatrix}$

$= \det A - \det\begin{pmatrix} a & 1 & b \\ c & 2 & d \\ e & 3 & f \end{pmatrix} = \det A - \det\begin{pmatrix} a & c & e \\ 1 & 2 & 3 \\ b & d & f \end{pmatrix}$

$= \det A - \det B = 5 - 11 = \boxed{-6}$ (5점)

(c) $\det\begin{pmatrix} a & c & e \\ 3 & 6 & 9 \\ b & d & f \end{pmatrix} = 3 \cdot \det\begin{pmatrix} a & c & e \\ 1 & 2 & 3 \\ b & d & f \end{pmatrix} = 3 \cdot \det B = 3 \cdot 11 = \boxed{33}$ (5점)

(d) $\det\begin{pmatrix} 2a & 2b & 2 \\ 2c & 2d & 2 \\ 2e & 2f & 2 \end{pmatrix} = 2^3 \cdot \det\begin{pmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{pmatrix} = 8 \cdot \det A$

$= 8 \cdot 5 = \boxed{40}$ (5점)

(채점기준) 답이 틀리면 부분점수 없음.

#5.

풀이 1. $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,0,1)$ 라 하면

$$L(e_1) = (1,-1,0)$$

$$L(e_2) = (-3,3,0)$$

$$L(e_3) = (0,0,4)$$

$\therefore$ 대응되는 행렬은 $\left(L(e_1)\ L(e_2)\ L(e_3) \right) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ 이다.

풀이 2. $X = (x, y, z)$ 라 두면

$L(X) = (x-3y, -x+3y, 4z)$ 이다.

L에 대응되는 행렬을 A라 두면

$L(X) = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ 이므로

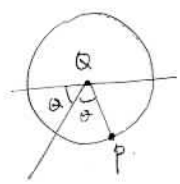
$\therefore A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ 이다.

※ 풀이 1의 경우 $L(e_i)$의 계산이 틀려도 대응되는 행렬을 구하는 방법이 맞는 경우 : 15점.

※ 풀이 2의 경우 $L(X)$의 계산이 틀려도 대응되는 행렬을 구하는 방법이 맞을 경우 : 15점.
(단, (x, y, z)를 왼쪽에서 곱하는지 오른쪽에서 곱하는지 여부의 표시가 없으면 10점, 기본적으로 A가 왼쪽에서 곱해지는 행렬일 때 점수를 부여함.)

※ 풀이 1, 2의 경우 $L(e_i)$와 $L(X)$만 맞고 행렬을 구하는 방법이 잘못된 경우 5점.

6. (a) 동전 중심의 자취 $Q = (2\cos\theta, 2\sin\theta)$.



P는 $Q + (\cos(\pi+2\theta), \sin(\pi+2\theta))$

$\therefore$ P의 자취 $X(\theta) = (2\cos\theta - \cos 2\theta,\ 2\sin\theta - \sin 2\theta)$.

(b) 한바퀴 $\Rightarrow$ $0 \le \theta \le 2\pi$.

$X'(\theta) = (-2\sin\theta + 2\sin 2\theta,\ 2\cos\theta - 2\cos 2\theta)$

$|X'(\theta)|^2 = 4\sin^2\theta - 8\sin\theta\cdot\sin 2\theta + 4\sin^2 2\theta + 4\cos^2\theta - 8\cos\theta\cdot\cos 2\theta + 4\cos^2 2\theta$.

$= 8 - 8\cos\theta$.

$\therefore l = \int_0^{2\pi} \sqrt{8 - 8\cos\theta}\, d\theta = \int_0^{2\pi} 4\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}\, d\theta = \int_0^{2\pi} 4\cdot\sin\frac{\theta}{2}\, d\theta$

$= \left[-8\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 16$.

(c) $x'(\theta) = 0$, $y'(\theta) \neq 0$

$\therefore$ $-2\sin\theta + 2\sin 2\theta = 0$

$-2\sin\theta(1 - 2\cos\theta) = 0$

$\therefore \theta = 0, \pi$. or $\pm\frac{\pi}{3}$.

1사분면위의점. $y'(\theta) \neq 0$ $\Rightarrow$ $\theta = \frac{\pi}{3}$.
$(\sin\theta \neq 0)$

$\therefore X(\frac{\pi}{3}) = (2\cdot\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{2}{3}\pi,\ 2\sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3})$

$= (\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

*채점기준 : (a)가 틀릴경우 (b),(c) 0점.

세부기준 (a) 부호가 틀릴경우 부분점수 5점 (단 유도과정이 정확해야함)

(b) $\int_0^{2\pi} |X'(\theta)|\, d\theta$ 를 잘유도하면 부분점수 5점.
($0 \le \theta \le 2\pi$, $X'(\theta)$, $|X'(\theta)|$: 이 부분의 식이 정확히 맞아야함)

(c) $\theta = \frac{\pi}{3}$까지 계산하는데 5점.
($\theta = \frac{\pi}{3}$ 뿐임을 밝혀야함)

7. $X(t) = (t, \frac{1}{2}t^2) \quad (0 \le t \le 1)$

$X'(t) = (1, t)$

$|X'(t)| = \sqrt{1+t^2}$

$l = \int_0^1 \sqrt{1+t^2}\,dt$ (5점) $\quad \bar{x} = \frac{1}{l}\int_0^1 t\sqrt{1+t^2}\,dt \quad \bar{y} = \frac{1}{l}\int_0^1 \frac{1}{2}t^2\sqrt{1+t^2}\,dt$ (5점)

$$l = \int_0^1 \sqrt{1+t^2} = \int_0^{\sinh^{-1}(1)} \cosh^2\theta\, d\theta$$

$t = \sinh\theta$

$dt = \cosh\theta\, d\theta$

$$\cancel{= \int_0^{\sinh^{-1}(1)} \cosh^2\theta}$$

$$= \int_0^{\log(1+\sqrt{2})} \frac{1}{4}(e^{2\theta} + e^{-2\theta} + 2)\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left(\log(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}\right)$$ (5점)

$$\bar{x} = \frac{1}{l}\int_0^1 t\sqrt{1+t^2}\,dt = \frac{1}{3l}(2\sqrt{2}-1)$$ (5점)

$$\bar{y} = \frac{1}{l}\int_0^1 \frac{1}{2}t^2\sqrt{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2l}\int_0^{\sinh^{-1}(1)} \sinh^2\theta\cosh^2\theta\,d\theta$$

$t = \sinh\theta$

$dt = \cosh\theta\, d\theta$

$$= \frac{1}{2l}\int_0^{\log(1+\sqrt{2})} \frac{1}{16}(e^{4\theta} + e^{-4\theta} - 2)\,d\theta$$

$$= \frac{1}{32l}\left[\frac{1}{4}e^{4\theta} - \frac{1}{4}e^{-4\theta} - 2\theta\right]_0^{\log(1+\sqrt{2})}$$

$$= \frac{1}{16l}\left(3\sqrt{2} - \log(1+\sqrt{2})\right)$$ (5점)

8. $X(t) = (t, t^2, \frac{2}{3}t^3)$

1) $X'(t) = (1, 2t, 2t^2)$, $X''(t) = (0, 2, 4t)$

$$K(t) = \frac{|X'(t) \times X''(t)|}{|X'(t)|^3}$$ ┘5점

① $X'(t) \times X''(t) = (4t^2, -4t, 2)$ $|X'(t) \times X''(t)| = \sqrt{16t^4 + 16t^2 + 4} = 2(2t^2+1)$ ┘5점

② $|X'(t)| = \sqrt{1 + 4t^2 + 4t^4} = 2t^2 + 1$ ┘5점

$$\therefore K(t) = \frac{2(2t^2+1)}{(2t^2+1)^3} = \frac{2}{(2t^2+1)^2}$$ ┘5점

2) $K(t) = \left| \frac{1}{|X'(t)|} \left(\frac{X'(t)}{|X'(t)|} \right)' \right|$ ┘5점

$$\frac{X'(t)}{|X'(t)|} = \frac{1}{2t^2+1}(1, 2t, 2t^2) = \left(\frac{1}{2t^2+1}, \frac{2t}{2t^2+1}, \frac{2t^2}{2t^2+1} \right)$$

$$\left(\frac{X'(t)}{|X'(t)|} \right)' = \left(\frac{-4t}{(2t^2+1)^2}, \frac{2(2t^2+1) - 2t(4t)}{(2t^2+1)^2}, \frac{4t(2t^2+1) - 2t^2(4t)}{(2t^2+1)^2} \right)$$

$$= \left(-\frac{4t}{(2t^2+1)^2}, \frac{2-4t^2}{(2t^2+1)^2}, \frac{4t}{(2t^2+1)^2} \right)$$

$$\frac{1}{|X'(t)|} \left(\frac{X'(t)}{|X'(t)|} \right)' = \left(-\frac{4t}{(2t^2+1)^3}, \frac{2-4t^2}{(2t^2+1)^3}, \frac{4t}{(2t^2+1)^3} \right)$$ ┘ 곡률벡터 성분하나가 틀리면 −5점
2개이상 틀리면 기본5점.

$$K(t) = \left| \frac{1}{|X'(t)|} \left(\frac{X'(t)}{|X'(t)|} \right)' \right| = \frac{1}{(2t^2+1)^3} \sqrt{(4t)^2 + (2-4t^2)^2 + (4t)^2}$$

$$= \frac{2(2t^2+1)}{(2t^2+1)^3} = \frac{2}{(2t^2+1)^2}$$

* 곡률벡터 $K(t) = \frac{1}{|X'(t)|} \left(\frac{X'(t)}{|X'(t)|} \right)'$ 만 쓴경우는 3점

곡률벡터 $K(t)$를 확실히 다 구했다면 13점 만약 성분하나만 틀릴경우 8점

(곡률벡터의 크기 K에 대한 언급없이 곡률벡터만 구했을때)

* 곡률벡터를 $\frac{X'(t) \times X''(t)}{|X'(t)|^3}$ 라고 쓴경우는 0점! (절대값을 붙혀 답이 맞더라도 하더라도.)

#9. 주어진 곡선은 $X(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ $(0 \le t \le \frac{\pi}{2})$

로 매개화 할 수 있다. ┘ 5점

$ds = |X'(t)|\, dt$ 에서

$X'(t) = (-3\cos^2 t \sin t,\ 3\sin^2 t \cos t)$

$|X'(t)| = \sqrt{9\cos^4 t \sin^2 t + 9\sin^4 t \cos^2 t} = 3\sin t \cos t$ $(\because 0 \le t \le \frac{\pi}{2})$ ┘ 10점

$$\therefore\ m = \int_X \mu\, ds$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mu(X(t))\, |X'(t)|\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^9 t + \sin^9 t)\, 3\sin t \cos t\, dt$$ ┘ 15점

$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{10} t \sin t\, dt + 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} t \cos t\, dt$$

치환적분을 이용하면

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{10} t \sin t\, dt = \frac{1}{11}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} t \cos t\, dt = \frac{1}{11}$$

$$\therefore\ m = \frac{6}{11}$$

┘ 20점

※ 매개화를 다르게 한 경우도 똑같은 기준 적용.