

수학 및 연습 1 기말고사

(2012년 7월 30일 11:00-13:00)

학번:	이름:
-----	-----

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

문제 1 (20점). 벡터 $\mathbf{a} = (2, 1, -3)$ 를 벡터 $\mathbf{v} = (3, -1, 0)$ 에 평행한 벡터와 \mathbf{v} 에 수직인 벡터의 합으로 나타내시오.

문제 2 (20점). $x + 2y + 3z = 1$ 을 만족하는 $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ 에 대해 $2x^2 + y^2 + 5z^2$ 의 최솟값을 구하시오.

문제 3 (20점). 선형사상 $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 를 생각하자. 벡터 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ 가 T 의 치역에 속하고 일차독립일 때, $T(\mathbf{a}_1) = \mathbf{b}_1, T(\mathbf{a}_2) = \mathbf{b}_2, T(\mathbf{a}_3) = \mathbf{b}_3$ 를 만족하는 벡터 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 가 일차독립임을 보이시오.

문제 4 (15점). 다음 행렬의 행렬식을 구하시오.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -4 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

문제 5 (25점). 벡터 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 에 대해 사상 $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 가

$$T(\mathbf{x}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{x}) \times \mathbf{a}$$

와 같이 주어져 있다. T 가 선형사상임을 보이고, 이에 대응되는 행렬을 구하시오.

문제 6 (30점). 다음과 같이 주어진 사이클로이드의 중심을 구하시오.

$$X(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t), \quad t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$$

문제 7 (25점). 타원 $x^2 + 4y^2 = 1$ 상의 점 $(-1, 0)$ 에서의 곡률벡터와 접촉원을 구하시오.

문제 8 (25점). 곡선 $X(t)$ 의 길이는 재매개화하여도 변하지 않음을 보이시오.

문제 9 (20점). \mathbb{R}^3 에 중심이 $(-1, 1, 2)$ 이고 점 $(3, 4, 7)$ 을 지나는 원이 주어져 있다. 이 원의 원주상을 운동하는 동점 P 가 점 $(3, 4, 7)$ 을 지나는 순간의 각속도 벡터가 $(2, -1, -1)$ 이라고 한다. 이 때 동점 P 의 속도벡터를 구하시오.