

2014년 여름학기 수학 및 연습 1

기말고사 모범답안.

$$\begin{aligned} 1. \quad T(a_1) &= (a_2 + a_3) \times a_1 \\ T(a_2) &= (a_1 + a_3) \times a_2 \\ T(a_3) &= (a_1 + a_2) \times a_3 \quad \text{이므로,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(a_1) + T(a_2) + T(a_3) &= a_2 \times a_1 + a_3 \times a_1 + a_1 \times a_2 + a_3 \times a_2 \\ &+ a_1 \times a_3 + a_2 \times a_3 = -\cancel{a_1 \times a_2} + \cancel{a_3 \times a_1} + \cancel{a_1 \times a_2} - \cancel{a_2 \times a_3} \\ &- \cancel{a_3 \times a_1} + \cancel{a_2 \times a_3} = 0 \quad \text{이다. 하나의 벡터가 나머지} \\ &\text{벡터의 일차결합으로 표현되므로 } T(a_1), T(a_2), T(a_3) \text{ 은 일차종속} \end{aligned}$$

20점.

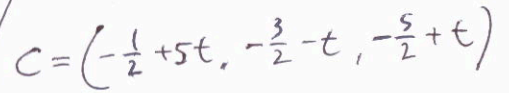
$$\begin{aligned} * \quad & T(a_1) + T(a_2) + T(a_3) = T(a_1 + a_2 + a_3) = (a_1 + a_2 + a_3) \times (a_1 + a_2 + a_3) = 0 \\ & \text{이므로 일차종속} \end{aligned}$$

으로 풀어도 됨.

* 부분점수 없음.

③ 법선벡터: $(-2, 0, -2) \times (3, -2, 2) = (-4, -2, 4)$

$$\therefore 2x + y - 2z = 5 \quad \text{--- (5)}$$



$$t = \frac{5}{14}$$

$$C = \left(\frac{9}{4}, -\frac{13}{4}, -\frac{15}{4} \right)$$

$$= (1, 1, 1) - 2 \frac{-2}{6} (1, -2, -1)$$

$$= \left(\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) \quad \text{5점}$$

$$(2+t) - 2(1+t) - t = 5$$

$$t = -\frac{5}{2}$$

$$B = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$$

3. 주어진 두 평면의 교선의 방향벡터는 두 평면의 법선과 모두 수직이다. 즉, 교선의 방향벡터를

$$(1, -2, 4) \times (1, 1, -2) = (0, 6, 3)$$

이라 할 수 있다. 또, 두 평면은 공통적으로 점 $(4, 1, 0)$ 을 포함하므로, 교선의 방향벡터는

$$x=4, \quad \frac{y-1}{6} = \frac{z}{3}$$

이다. (총 $x=4, y=2z+1, z$, 10점)

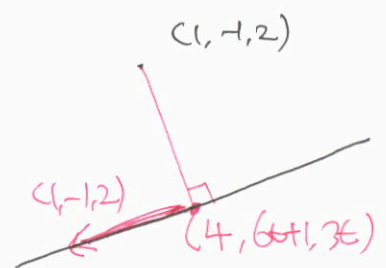
따라서 구하는 수선의 발은 $(4, 6t+1, 3t) \quad (t \in \mathbb{R})$ 가 될 수 있다.

그러면 $(4, 6t+1, 3t) - (1, -1, 2) \perp (0, 6, 3)$ 이므로

$$(3, 6t+2, 3t-2) \cdot (0, 6, 3) = 0$$

$$\Rightarrow 45t + 6 = 0$$

$$\Rightarrow t = -\frac{2}{15}$$



따라서 구하는 수선의 발은

$$\left(4, 6 \cdot \left(-\frac{2}{15}\right) + 1, 3 \cdot \left(-\frac{2}{15}\right) \right) = \underline{\underline{\left(4, \frac{1}{5}, -\frac{2}{5} \right)}}$$

이다. (20점)

*채점기준

- 교선을 구하면 10점. \leftarrow 방향벡터 5점 + 교선이 지나는 점 5점
(교선 위의 점이 $(4, 6t+1, 3t)$ 와 같아 나타내다 5점 안함)
- 수선의 발을 정확하게 구하면 20점.
- 이외의 오류에 따른 채점은 없음.

4.

(방법 1)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{라 하면}$$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} + a_{13} \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} \\ a_{31} + a_{32} + a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \det A &= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11} + a_{12} + a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} + a_{22} + a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{31} + a_{32} + a_{33} \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

(방법 2) A의 각 열벡터를 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 라 하면 $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$.

이때 $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$ 이므로 세 벡터 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 은 일차종속이다.

$$\det A = 0$$

(방법 3) A가 역행렬을 가진다면 (즉 $\det A \neq 0$ 이면), 주어진 등식의 양쪽에 역행렬 A^{-1} 을 곱하여

$$A^{-1}A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

을 얻고, 이는 모순이다. 따라서 A는 역행렬을 가지지 않고 $\det A = 0$ 이다.

★ 해답기준

- 논리가 맞다면 어떤 방법으로 풀어도 10점.

- 부분점수 없음.

$$5. (a) \quad X := (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$Y := (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$t \in \mathbb{R}$$

$$X + tY = (x_1 + ty_1, x_2 + ty_2, \dots, x_n + ty_n)$$

$$:= (z_1, z_2, \dots, z_n)$$

$$(x_i + ty_i := z_i, \quad i=1, 2, \dots, n)$$

$$L_\sigma(X + tY) = L_\sigma(z_1, z_2, \dots, z_n)$$

$$= (z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}, \dots, z_{\sigma(n)})$$

$$= (x_{\sigma(1)} + ty_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)} + ty_{\sigma(n)})$$

$$= (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) + t(y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(n)})$$

$$= L_\sigma(X) + tL_\sigma(Y)$$

$\therefore L_\sigma$ 는 선형사이다. ┘ 10점

$$(b) \quad L_\sigma(x_1, x_2, x_3) = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}) = (x_3, x_1, x_2)$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{┘ 5점}$$

$$\det A = 1 \quad \text{┘ 5점}$$

6. (a) O, P_1, P_2, P_3 이 이루는 평행육면체의 부피는

$$V = \det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 2.$$

┘ 5점.

사면체의 부피는 평행육면체 부피의 $\frac{1}{6}$ 이므로 $\frac{1}{6} \times 2 = \frac{1}{3}$. ┘ 10점.

(b) $\det A = \det \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 1 & 2 \\ -3 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 5\sqrt{6} - 3$ 이므로,

┘ 5점

$L_A(O), L_A(P_1), L_A(P_2), L_A(P_3)$ 이 이루는 사면체의 부피는

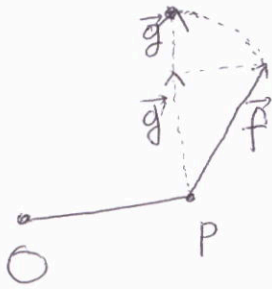
$$\frac{1}{6} \cdot \det A \cdot V = \frac{1}{6} (5\sqrt{6} - 3) \cdot 2 = \frac{5\sqrt{6}}{3} - 1.$$

┘ 10점.

7. (a) 원점 O 에 대한 회전력 = $\vec{OP} \times \vec{f} = (1, 0, 1) \times (0, 2, 1) = (2, -1, 2)$ +5

회전이 일어나는 평면 : $2x - y + 2z = 0$ +10

(b)



\vec{g} 의 방향이 회전력과 \vec{OP} 에 둘다 수직이며 \vec{f} 와 회전이 같은 방향으로 일어나는 벡터로 두자. +5

$$\vec{g}' = \vec{f} - \frac{\vec{f} \cdot \vec{OP}}{|\vec{OP}|^2} \vec{OP} = (0, 2, 1) - \frac{(0, 2, 1) \cdot (1, 0, 1)}{2} (1, 0, 1)$$

$$= \left(\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}\right)$$

크기를 \vec{f} 와 같게 해주면,

$$\vec{g} = \frac{\sqrt{10}}{6} (1, 4, 1)$$

+10.

* \vec{g} 의 방향을 외적을 사용하여 구할수도 있다. 단, 이때는 부호를 잘 결정해야 한다. (회전력 $\times \vec{OP}$ 로 해야 한다.)

#8. (a)

곡선 X 의 점을 (x, y) 라고 하면,

$$\sqrt{(x+\frac{1}{\sqrt{2}})^2+y^2} \cdot \sqrt{(x-\frac{1}{\sqrt{2}})^2+y^2} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow (x^2+y^2+\frac{1}{2}+\sqrt{2}x)(x^2+y^2+\frac{1}{2}-\sqrt{2}x) = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow (x^2+y^2+\frac{1}{2})^2 - 2x^2 = \frac{1}{4}$$

(r, θ) -좌표계로 바꾸면

$$(r^2+\frac{1}{2})^2 - 2r^2\cos^2\theta = \frac{1}{4} \Leftrightarrow r^4+r^2-2r^2\cos^2\theta = 0$$

$$\Leftrightarrow r^4 = r^2(2\cos^2\theta - 1)$$

$$\therefore r^2 = 2\cos^2\theta - 1 \quad \text{or} \quad r=0$$

$$\text{혹은, } r^2 = \cos 2\theta \quad \text{or} \quad r=0$$

└ +15 pt.

(재검 기준)

$r = \sqrt{\cos 2\theta}$ 와 같이 곡선의 일부만을 나타낸 경우 -5 pt.

#8. (b.) $P(s)$ 는 1사분면내 무리해 있고, $P(s)$ 와 원순가가리인 γ 가 s 이므로, $s = \sqrt{\cos 2\theta_0}$ for some θ_0 를 만족한다. ($\theta_0 \leq \frac{\pi}{4}$)

즉 X 는 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 이 때 원순 $O = P(0)$ 를 지나므로,

$$l(s) = \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2} d\theta \quad \text{for } f(\theta) = \sqrt{\cos 2\theta}$$

$$= \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos 2\theta + \frac{\sin^2 2\theta}{\cos 2\theta}} d\theta$$

$$= \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta \quad \text{--- +5 pt} \quad \begin{array}{l} s = \sqrt{\cos 2\theta} \\ ds = \frac{-\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta \end{array}$$

$$= \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{-\sin 2\theta} \cdot \frac{-\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{1 - (\cos 2\theta)^2}} \frac{-\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta$$

$$= \int_0^s \frac{dt}{\sqrt{1 - t^4}}$$

1711 --- +10 pt.

9.

$$(a) \quad X'(t) = (-2\sin t + 2\sin 2t, 2\cos t - 2\cos 2t)$$

$$|X'(t)|^2 = (8 - 8\cos t)^2 = (4\sin \frac{t}{2})^2$$

$$s = \int_0^t |X'(s)| ds = 8 - 8\cos \frac{t}{2}, \quad t = 2 \arccos(1 - \frac{s}{8}) \quad \downarrow \text{6점}$$

$$\therefore \tilde{X}(s) = \left(2\cos(2\arccos(1 - \frac{s}{8})) - \cos(4\arccos(1 - \frac{s}{8})), \right. \\ \left. 2\sin(2\arccos(1 - \frac{s}{8})) - \sin(4\arccos(1 - \frac{s}{8})) \right) \quad \downarrow \text{6점}$$

- s 를 잘못 구하면 0점
- $\cos t = 2(1 - \frac{s}{8})^2 - 1$ 이용해서 답 작성시 계산 정확하면 10점
- s 는 제대로 구했지만 $\tilde{X}(s)$ 잘못 구했을 때는 5점

(b)

$$X'(t) = (-2\sin t + 2\sin 2t, 2\cos t - 2\cos 2t)$$

$$X''(t) = (-2\cos t + 4\cos 2t, -2\sin t + 4\sin 2t)$$

평면 곡선 이므로 $X(t) = (x(t), y(t))$ 라 놓고 $K(t)$ 를 구하면.

$$K(t) = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{24 \sin^2 \frac{t}{2}}{(4 \sin^2 \frac{t}{2})^{\frac{3}{2}}} \quad \downarrow \text{(5점)}$$

$$= \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{\sin \frac{t}{2}}, \quad R(t) = \frac{8}{3} \cdot \sin \frac{t}{2} \quad \text{이므로}$$

$$\therefore \sin \frac{t}{2} = \frac{3}{8} R(t) \quad \downarrow \text{(5점)}$$

- 곡률 벡터 or 곡률의 크기 구하는 공식을 정확히 연립하면 5점
- $|X' \times X''|$ or $|x'y'' - x''y'|$ 등의 계산 과정이 4과목지 아니면 감점

10. $X(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$

접촉원의 중심은 $X(\pi) + \frac{\vec{K}(\pi)}{|\vec{K}(\pi)|^2}$ 로 구할 수 있다. \downarrow 5점

$$\vec{K}(t) = \frac{1}{|x'|} \left(\frac{x'}{|x'|} \right)' = \left(\frac{1}{4} \cos \frac{t}{2}, -\frac{1}{4} \right) \text{ 이므로}$$

$$\vec{K}(\pi) = \left(0, -\frac{1}{4} \right), \quad |\vec{K}(\pi)| = \frac{1}{4} \quad \downarrow 10점$$

$$\therefore \text{중심} : (\pi, 2) + 16 \left(0, -\frac{1}{4} \right) = (\pi, -2) \quad \downarrow 5점$$

- 접촉원의 반지름이 그 점에서의 곡률과 같음을 이용해서 답한 작성시.

cydloid 의 그림을 그리거나, 다른 합당한 방법으로

접촉원의 중심이 $(\pi, 6)$ 이 아니라 $(\pi, -2)$ 임을 보여야 정답 인정.

- 곡률벡터, 곡률벡터의 크기, 접촉원의 중심을 구하는 방식이 정략하면 5점.
- 곡률벡터 구해서 답한 작성시 $(0, -\frac{1}{4})$ 는 정략리 구해야 인정.