

**수학 및 연습 1 기말고사**  
(2012년 6월 9일 오후 1:00-3:00)

학번:	이름:
-----	-----

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

문제 1 (25점). 다음 물음에 답하시오.

- (a) (15점) 3차원 공간에서 꼬인 위치에 있는 두 직선  $X(t) = P + t\mathbf{a}$ ,  $Y(t) = Q + t\mathbf{b}$  사이의 거리는

$$d = \frac{|(Q - P) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})|}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}$$

임을 보이시오.

- (b) (10점) 다음 두 직선 사이의 거리를 구하시오.

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{-1}, \quad x-3 = \frac{y-1}{4} = -z-1$$

문제 2 (20점). 방향이  $\mathbf{v} = (3, 2, 1)$  이고 점  $(x_1, x_2, x_3)$  를 지나는 직선이  $xy$ -평면과 만나는 점을  $T(x_1, x_2, x_3)$  라고 하자.

- (a) (10점) 사상  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  을 구하시오.  
(b) (10점)  $T$  가 선형사상임을 보이고, 이에 대응되는 행렬을 구하시오.

문제 3 (20점). 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점)  $3 \times 3$  행렬

$$A = \begin{pmatrix} (x+1)^2(x-1) & 2(1-x) & 1-x \\ x+1 & -2(x+1) & 1 \\ x+1 & 2 & -(x+1) \end{pmatrix}$$

에 대하여,  $\det(A^{2012}) = 0$  을 만족하는  $x$  를 구하시오.

- (b) (10점)  $5 \times 5$  행렬  $B$  가  $B^t = -B$  일 때,  $\det B$  를 구하시오.

문제 4 (20점). 평면에 정규곡선  $X(t) = r(t)(\cos t, \sin t)$  가 있다. 모든  $t$  에 대하여  $r(t) > 0$  이고  $X(t)$  와  $X'(t)$  의 사이각이  $\alpha$  ( $0 < \alpha < \pi$ ) 로 일정할 때, 모든  $t$  에 대하여  $r(t) = ae^{kt}$  ( $a, k$  는 상수) 꼴임을 보이시오.

문제 5 (40점). 3차원 공간의 이급 정규곡선  $X(t)$  에 대하여 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점) 속도 벡터  $X'(t)$  와 가속도 벡터  $X''(t)$  가 일차독립이면 재매개화하여도 여전히 일차독립임을 보이시오.  
(b) (10점) 곡선  $X(t)$  의 접촉평면은 재매개화하여도 변하지 않음을 보이시오.  
(c) (10점) 모든  $t$  에 대하여

$$\left| \left( \frac{X'(t)}{|X'(t)|} \right)' \right| = \frac{|X'(t) \times X''(t)|}{|X'(t)|^2}$$

임을 보이시오.

- (d) (10점) 곡선  $X(t)$  의 곡률이  $\kappa(t)$  일 때, 곡선  $Y(t) = cX(t)$  ( $c > 0$ ) 의 곡률  $\tilde{\kappa}(t)$  을 구하시오.

문제 6 (30점). 평면에 포물선  $X(t) = (t, at^2)$  ( $-1 \leq t \leq 1$ ) 이 주어졌을 때, 다음 물음에 답하시오. 단,  $a > 0$  이다.

- (a) (10점) 각 점에서 곡률  $\kappa(t)$  를 구하시오.  
(b) (10점) 곡률의 선적분  $\int_X \kappa ds$  를 구하시오.  
(c) (10점) 각 점에서의 곡률벡터  $\boldsymbol{\kappa}(t)$  를 구하시오.

문제 7 (30점). 곡선  $X(t) = (t \cos t, t \sin t, t)$  ( $-\pi \leq t \leq \pi$ ) 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점) 곡선 위의 점  $X\left(\frac{\pi}{2}\right)$  를 지나고  $X\left(\frac{\pi}{2}\right)$  에서 곡선의 접촉평면과 수직인 직선의 방정식을 구하시오.  
(b) (20점) 밀도함수가  $\mu(x, y, z) = \frac{y}{\sqrt{2+z^2}}$  로 주어졌을 때, 곡선의 질량과 질량중심을 구하시오.

문제 8 (15점). 극좌표로 주어진 두 곡선  $r = 2 \cos \theta + 2$  와  $r = \cos \theta$  로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하시오.