수학 및 연습 1 기말고사

(2008년 6월 7일 오후 1:00-3:00)

학번:	이름:

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

문제 1 (30점). 다음 각 명제는 참인가 거짓인가? 참이면 ○, 거짓이면 × 로 표기하라. (답만 쓸 것. 맞으면 각 3점. 틀리면 각 2점 감점.)

(a) 평행이동은 선형사상이다.
(b) 행렬의 곱은 선형사상의 합성에 대응된다.
(c) 두 벡터 v, w 가 서로 수직일 필요충분조건은 $|v-w|^2 = |v|^2 + |w|^2$ 인 것이다.
(d) 행렬 A, B 가 대각행렬이면, $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ 이다.
(e) 임의의 3차 정사각행렬 A 에 대해, $\det(2A) = 2\det(A)$ 이다.
(f) $v, w \in \mathbb{R}^3$ 이면, $v \times w = w \times v$ 이다.
(g) $\mathbb{R}^3$ 의 외적은 결합법칙을 만족한다.
(h) 원점 주위의 원운동은 항상 속도벡터와 가속도벡터가 수직이다.
(i) 곡선의 가속도 방향은 재매개화에 의해 변하지 않는다.
(j) 반지름이 r 인 원의 곡률은 r 이다.

문제 2 (20점). $\mathbb{R}^3$의 세 벡터 $A = (1,2,2)$, $B = (2,1,1)$, $X_0 = (1,3,1)$ 에 대해, $p(X)$ 를 A 에 대한 X 의 정사영이라고 할 때

(a) $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 는 $p \circ p = p$ 를 만족함을 보여라.
(b) $M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 를 $M(X) = p(X) + B$로 정의할 때 $M^{2008}(X_0)$ 를 구하라. (단 M^{2008} 은 M 을 2008번 합성한 것.)

문제 3 (20점). 선형사상 $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 가

$$L\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad L\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}, \qquad L\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\\6\end{pmatrix}$$

을 만족한다고 하자. $B \subset \mathbb{R}^3$ 를

$$B = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le x, y, z \le 1 \right\}$$

로 놓을 때, L 에 의한 B 의 상의 부피를 구하라.

문제 4 (20점). $A = (1,1,-1)$, $B = (1,-2,1)$, $C = (1,1,1) \in \mathbb{R}^3$ 일 때, $\{A, B, X\}$ 가 일차종속인 $X \in \mathbb{R}^3$ 에 대한 $|X - C|$ 의 최소값을 구하라.

문제 5 (15점). $X : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ 가 무한히 미분 가능한 곡선일 때

$$\frac{d}{dt}\Big(X(t) \cdot \big(X'(t) \times X''(t)\big)\Big) = X(t) \cdot \big(X'(t) \times X'''(t)\big)$$

임을 보여라.

문제 6 (20점). 직선 $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ 주위를 일정한 각속력 ω 로 회전하는 동점이 점 $(1,1,1)$ 을 지나는 순간의 속력을 구하라.

문제 7 (20점). 극좌표로 주어진 곡선 $r = 1 + \cos\theta$ 의 길이와 이 곡선으로 둘러싸인 영역의 면적을 구하라. (단 $0 \le \theta \le 2\pi$)

문제 8 (15점). 곡선 $X(t) = (3t\cos t, 3t\sin t, 2\sqrt{2}t^{\frac{3}{2}})$, $0 \le t \le 2\pi$ 의 밀도함수가 $\mu(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ 일 때 곡선 X 의 질량을 구하라.

문제 9 (40점). 곡선

$$X(t) = (\cos t + t\sin t, \sin t - t\cos t), \qquad (0 \le t \le 2\pi)$$

에 대해,

(a) 이 곡선을 호의 길이로 재매개화 하라.
(b) $X(\pi) = (-1, \pi)$ 에서의 곡률벡터를 구하라.
(c) $X(\pi)$ 에서의 접촉원을 구하라.
(d) 이 곡선의 중심을 구하라.