2008년 계절학기
「수학 및 연습 1」
기말고사

#1. (a). $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = 0$. $x, y, z \in \mathbb{R}$.

양변을 각각 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$와 내적하면

$x|\vec{a}| = 0$, $y|\vec{b}|^2 = 0$. $z|\vec{c}|^2 = 0$. (∵ 서로 직교)

$\Rightarrow x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. (∵ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$는 모두 0이 아님).

∴ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$는 일차독립. — +5점.

· 이유가 명확하지 않거나 식으로 정확히 계산해 내지 않은 경우 2점 감점. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$를 "특정 벡터"로 두고 푼 경우도 2점 감점.

#1, (b). 좌표공간 $\mathbb{R}^n$에서 v만큼 평행이동하는 사상 T_v가 선형사상이면 $v=0$ 임을 보이시오.

답) 임의의 $x, y \in \mathbb{R}^n$와 $t \in \mathbb{R}$에 대하여

i) $L(x+y) = L(x) + L(y)$

ii) $L(tx) = tL(x)$

를 만족하면 $L(x)$를 선형사상이라 하므로,

i) $T(x+y) = x+y+v$

$T(x)+T(y) = x+v+y+v$ $\Rightarrow$ $v=0$

ii) $T(tx) = tx+v$

$tT(x) = t(x+v)$ $\Rightarrow$ $v=0.$

$\therefore$ $v=0.$

채점기준) 1. 선형성의 두 조건 중 한가지라도 쓰지 않은 경우 0점.

2. $L(ax+y)$ 임을 보인경우 5점.

3. i) 조건을 $L(X+X)$일 때만 적용하면 0점.

4. 말로 설명하되 증명이 없는 경우 0점.

1. (ㄴ) [5점]

가역행렬 A 가 서로 다른 역행렬 B, C 를 가진다고 가정하면

$$B = B \cdot I = B(AC) = (BA)C = I \cdot C = C$$

$\therefore B = C$

$\therefore$ 가역행렬의 역행렬은 유일하다.

1. (d). $\frac{d}{dt}|X'(t)| = \frac{X'(t)\cdot X''(t)}{|X'(t)|}$ 에서 $X'(t)\cdot X''(t) = 0$ 이므로

$\frac{d}{dt}|X'(t)| = 0$ 이고 $|X'(t)| = \text{Constant}$

9. $X'(t) = (1, \frac{1}{t})$, $|X'(t)| = \sqrt{1+\frac{1}{t^2}}$

$K(t) = \frac{1}{|X'(t)|}\left(\frac{X'(t)}{|X'(t)|}\right)' = \left(\frac{t}{(1+t^2)^2}, -\frac{t^2}{(1+t^2)^2}\right)$

$K(t)$ 는 $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 에서 최대곡률을 가진다

곡률이 최대인 점 $= X(\frac{1}{\sqrt{2}}) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \log\frac{1}{\sqrt{2}})$

$|K(\frac{1}{\sqrt{2}})| = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ 이므로 접촉원의 반지름 $= \frac{3\sqrt{3}}{2}$

접촉원의 중심 $C = X(\frac{1}{\sqrt{2}}) + \frac{K(\frac{1}{\sqrt{2}})}{|K(\frac{1}{\sqrt{2}})|^2} = (2\sqrt{2}, \log\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3}{2})$

접촉원 : $(x-2\sqrt{2})^2 + (y-(\log\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{3}{2}))^2 = \frac{27}{4}$.

채점기준: ① 최대곡률인 점 $X(\frac{1}{\sqrt{2}})$ 과 반지름 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 을 구하면 10점.

② 중심 : $(2\sqrt{2}, \log\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3}{2})$ 을 구하면 10점

②-1 : 중심구하는 과정없이 틀리면 감점 10점

〃 과정있고 계산 실수 감점 5점.

#2.

i) $P=(1,2,3)$, $Q=(1,-1,-1)$ 라 하면

$\Rightarrow \overrightarrow{PQ}=(0,-3,-4)$, $|\overrightarrow{PQ}|=5$.

구하는 점을 R 이라 하면 R은 선분 $\overline{PQ}$ 위에 있고 $\overline{PR}=1$ 이므로.

$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+\frac{1}{5}\overrightarrow{PQ}=(1,\frac{7}{5},\frac{11}{5})$

$\therefore R=(1,\frac{7}{5},\frac{11}{5})$ 】10점

(ii). 구하는 접평면의 방정식은

$(0,-3,-4)\cdot\left((x,y,z)-(1,\frac{7}{5},\frac{11}{5})\right)=0$.

$\rightarrow 3(y-\frac{7}{5})+4(z-\frac{11}{5})=0$

$\therefore 3y+4z=13$ 】10점

* (i)에서 점이 틀리면 0점.

(ii) $3y+4z$ 꼴이 나오면 5점

3. (a) i) $p(x), q(x) \in P_n$

$$T(p(x)+q(x)) = \int_1^x (p(t)+q(t))\,dt + x(p(x)+q(x))$$
$$= \int_1^x p(t)\,dt + xp(x) + \int_1^x q(t)\,dt + xq(x)$$
$$= T(p(x)) + T(q(x))$$

ii) $c \in R$, $p(x) \in P_n$

$$T(cp(x)) = \int_1^x cp(t)\,dt + x\cdot cp(x)$$
$$= c\left[\int_1^x p(t)\,dt + x\,p(x)\right]$$
$$= c\,T(p(x))$$

∴ T는 선형 사상.

(b) $n=2$. $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$

$$T(p(x)) = \int_1^x a_0 + a_1t + a_2t^2\,dt + x(a_0 + a_1x + a_2x^2)$$
$$= (-a_0 - \tfrac{1}{2}a_1 - \tfrac{1}{3}a_2) + 2a_0x + \tfrac{3}{2}a_1x + \tfrac{4}{3}a_2x^2$$ 5점

∴ 행렬 $= \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$

10점.

(a) : 20점만점 . (b) : 10점 만점

① 선형사상의 정의만 쓴경우 (맞은경우) : 5점 부분점수 없음

② (b)에서 T(p(x)) 계산까지 5점. 행렬도 맞은 경우 10점. 부분점수 없음.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 0 \end{array}\right)$$

이거쓴 경우 감점.

#4.

(a). $\mathbf{x}=(x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{y}=(x_2, y_2, z_2)$, $c \in \mathbb{R}$.

$$L(c\mathbf{x}+\mathbf{y}) = L(cx_1+x_2,\ cy_1+y_2,\ cz_1+z_2)$$

$$= \big((cx_1+x_2)+2(cy_1+y_2),\ 2(cy_1+y_2)-(cz_1+z_2),\ (cx_1+x_2)-3(cz_1+z_2)\big)$$

$$= cL(x_1, y_1, z_1) + L(x_2, y_2, z_2)$$

$$= cL(\mathbf{x}) + L(\mathbf{y})$$ // $\therefore$ L은 선형사상

$L(e_1)=(1,0,1)$, $L(e_2)=(2,2,0)$, $L(e_3)=(0,-1,-3)$ 5점.

$$\Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$ 5점.

(b)

$$Vol(R) = \underbrace{|v_1 \times v_2|}_{\text{밑면적}} \cdot \underbrace{|P_{v_1\times v_2}(v_3)|}_{\text{높이}}$$

$$= |v_1 \times v_2| \cdot \left| \frac{(v_1\times v_2)\circ v_3}{|v_1 \times v_2|^2} \cdot (v_1 \times v_2) \right|$$

$$= |(v_1 \times v_2)\circ v_3| = |\det(v_1, v_2, v_3)|$$ 10점.

(c)

$$Vol(L(R)) = |\det A| \cdot Vol(R)$$ 5점

$$\Rightarrow \quad \frac{Vol(L(R))}{Vol(R)} = |\det A| = 8.$$ 5점.

#5.

(i) $X(0) = (1,1,0)$

$X'(0) = (1,2,1)$

$X''(0) = (1,4,-1)$

접선은 $\ell(t) = X(0) + tX'(0)$ 이므로

$= (1+t,\ 1+2t,\ t)$

방정식으로 표현하면 $x-1 = \frac{y-1}{2} = z$ ┘ 10점

(ii)

구하는 접촉평면의 방정식은

$(X'(0) \times X''(0)) \cdot ((x,y,z) - X(0)) = 0.$

$\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 0.$

$\therefore\ 3x - y - z = 2.$

혹은 $X'(0) \times X''(0) = -(6,-2,-2)$ 이므로

$\Leftrightarrow 3(x-1) - (y-1) - z = 0.$ ┘ 10점.

* (i) 경우는 조금이라도 틀리면 0점

(ii) " $3x-y-z$ 꼴이 나오면 5점.

#6. (방법1) 한 잎은 θ=0 부터 θ=$\frac{\pi}{n}$ 까지 그려짐.

$$\therefore \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{1}{2} \sin^2 n\theta \, d\theta}_{+10} = \underbrace{\frac{\pi}{4n}}_{+20}.$$

(방법2) θ=0 부터 θ=2π 까지 그리면 2n개씩 나타남.

$$\therefore \underbrace{\frac{1}{2n}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \sin^2 n\theta \, d\theta}_{+10} = \underbrace{\frac{\pi}{4n}}_{+20}.$$

- n이 홀수일때 짝수일때로 나눠서 풀 경우.
  둘 중 하나라도 정확하면 +10점.
- θ=0 부터 θ=2π 까지 넓이 구하고 '한 잎'의 경우를 고려하지 않으면 0점. (n으로 나눈 경우도 0점).
- n=1, 2, 3, ... 각각에 대해 식을 구해서
  일반화 시킬 때 일반화 시킨 식이 나오지 않으면 0점

#7. 구간 $[0, a]$ 에서 정의된 곡선 $X(t) = (-t+3, \cosh t - 5, 5)$ 를 호의 길이로 매개화하시오.

답). $X'(t) = (-1, \sinh t, 0)$

$$|X'(t)| = \sqrt{1+\sinh^2 t} = \cosh t \quad (\because t \in [0, a])$$

5점

$$s(t) = \int_0^t \cosh u \, du = \sinh t$$

5점.

$$s(t) = \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

$$\Rightarrow t = \log\left(s + \sqrt{s^2+1}\right)$$

5점.

$$\therefore X(t) = \left(-\log\left(s+\sqrt{s^2+1}\right)+3, \sqrt{s^2+1} - 5, 5\right)$$

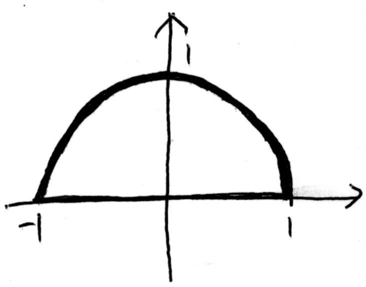
5점.

채점기준) 1. $t = \log\left(s+\sqrt{s^2+1}\right)$ 이라고 구하지 않고 $t = \sinh^{-1} s$ 라 쓴 경우 (−5점) (출제의도)

2. 마지막 $X(t)$의 형태가 틀리거나 없는 경우 (−5점)

3. $s(t)$의 적분이 틀리거나 적분구간이 바르지 않은 경우 0점.

8.



곡선의 매개화

$$X(t) = \begin{cases} (\cos t, \sin t) & 0 \le t \le \pi \\ (\cos t, 0) & \pi \le t \le 2\pi \end{cases}$$

곡선의 길이 $\ell = \pi + 2$ ⌋ 10점

$$\bar{x} = \frac{1}{\ell}\int_X x\,ds = \frac{1}{\ell}\int_0^{\pi} \cos t \cdot dt + \frac{1}{\ell}\int_{\pi}^{2\pi} \cos t\,|\sin t|\,dt = 0$$

⌋ 15점

$$\bar{y} = \frac{1}{\ell}\int_X y\,ds = \frac{1}{\ell}\int_0^{\pi} \sin t\,dt + \frac{1}{\ell}\int_{\pi}^{2\pi} 0 \cdot \sin t\,dt = \frac{2}{\pi+2}$$

⌋ 20점

$\therefore$ 중심 $= \left(0, \frac{2}{\pi+2}\right)$

* 곡선을 잘못 결정한 경우 ; 0점

$\bar{x}=0$ 은 곡선의 대칭성에 의해 얻을 수도 있음

$\bar{x}, \bar{y}$ 계산시 아래쪽 선분에 대한 고려가 없는 경우 틀린 것으로 간주

* 반원의 중심 $(0, \frac{2}{\pi})$, 선분의 중심 $(0,0)$ 각 곡선의 길이가 π 와 2 임을 사용하여

$$\frac{\pi}{\pi+2}\left(0, \frac{2}{\pi}\right) + \frac{2}{\pi+2}(0,0) = \left(0, \frac{2}{\pi+2}\right)$$ 도 맞는 답.

#9 번 모범답안은 1.(d) 답안과 함께 있습니다.