

기말 고사(2007 수학및연습 1 여름학기)

(1) (20 점) 세 벡터 $(0, 3, 3), (1, 1, 3), (-10, 11, -9)$ 의 일차 독립, 일차 종속 여부를 판단하라.

(2) (a)(10 점) 다음 5-치환 σ 의 부호를 구하시오.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b)(10 점) 다음 행렬의 행렬식을 구하시오.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a_{15} \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}.$$

(3) 함수 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (2x + y + z, 3x + y, 5x + y)$ 가 주어져 있을 때 다음 물음에 답하시오.

(a) (5 점) 점 $A \in \mathbb{R}^3$ 를 지나고 방향이 \vec{b} 인 직선을 매개화 하라.

(b) (10 점) 선형 사상 $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 가 직선을 직선으로 옮기는 것을 보이라.

(c) (15 점) 집합 $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x, y, z \leq 1\}$ 라 할 때 $f(E)$ 가 어떤 도형 인지 설명하고(간단한 증명을 반드시 쓸 것) 그 도형의 부피를 구하라.

(4) (40 점) 원기둥 $x^2 + y^2 = 4\pi^2$ 위에서 움직이는 곡선 $P(t) = (x(t), y(t), z(t))$ 가 있다. xy -평면에 이 곡선 $P(t)$ 를 정사영하면 $t = 0$ 일 때 점 $(2\pi, 0)$ 를 지나고 양의 방향으로 각속력 1인 원운동을 한다. 한편, $P(t)$ 의 z -성분 $z(t)$ 는 $t = 0$ 일 때 $z(0) = 0$, $z'(0) = 0$ 이고 가속도 2인 등가속도 운동을 한다. 또한 점 $(0, 0, z(t))$ 에서 시작하여 $P(t) = (x(t), y(t), z(t))$ 로 움직이는 반직선과 곡면 $x^2 + y^2 = z$ 과의 교점을 $X(t)$ 라 할 때 다음 물음에 답하라.

(a) $P(t)$ 를 구하라.

(b) $X(t)$ 를 구하라.

(c) $t = \pi$ 에서 $X(t)$ 의 접촉평면을 방정식을 구하여라.

(d) 곡면

$$S = \{s(P(t) - X(t)) + X(t) : 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 2\pi\}$$

을 xy -평면에 정사영하여 얻어지는 영역의 면적을 구하여라.

(5) (30 점) 극좌표 $r = 1 + \cos \theta$ 로 주어진 곡선으로 둘러싸인 내부 영역을 D_1 이라고 하고, 이것을 원점을 중심으로 90도 회전하여 얻은 영역을 D_2 라고 하자.

(a) D_1 과 D_2 를 한 평면에 도식하라(두 영역의 둘레의 교점이 있는 경우 이것을 정확히 표시).

(b) D_1 의 둘레의 길이를 구하여라.

(c) D_1 과 D_2 의 교집합의 넓이를 구하여라.

(6) (20 점) 임의의 벡터 $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$, 실수 θ 에 대하여 다음과 같이 정의된 함수 $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 가 있다고 하자.

$$L(\mathbf{x}) = (\cos \theta)\mathbf{x} + (1 - \cos \theta)(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})\mathbf{a} + (\sin \theta)(\mathbf{a} \times \mathbf{x})$$

(a) L 는 선형사상임을 보여라.

(b) $\mathbf{a} = (1, 0, 0)$ 일때 L 에 대응되는 행렬을 구하라.

(7) (20점) 평면에서 그래프가 $y = x^3$ 와 같이 주어져 있을 때 점 $P = (1, 1)$ 에서 곡률을 구하고 접촉원의 방정식을 구하라.

(8) (20 점) 곡선 X 는 $O = (0, 0, 0), P = (1, 1, 1)$ 를 잇는 선분이고 밀도 함수 $\rho(x, y, z) = x + y + z$ 일 때 이 곡선의 질량을 구하라.