

**수학 및 연습 1 기말고사**  
(2011년 6월 11일 오후 1:00-3:00)

학번:	이름:
-----	-----

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

문제 1 (20점). 원점에서  $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$  방향으로 진행하던 빛이 다음 세 점  $P, Q, R$  을 지나는 평면에 반사되어 나가고 있다.

$$P = (1, 2, 3), \quad Q = (2, 3, 1), \quad R = (3, 1, 2)$$

반사된 빛이  $xy$ -평면과 만나는 점을 구하시오.

문제 2 (25점). 선형사상

$$T : (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \rightarrow (0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점) 선형사상  $T$  에 대응되는 행렬을 구하시오.
- (b) (10점) 위에서 구한 행렬을  $R$  이라고 할 때,  $I + R + R^2 + \dots + R^{n-1}$  의 역행렬은  $I - R$  임을 보이시오.
- (c) (5점)  $R$  은 역행렬을 갖지 않음을 보이시오.

문제 3 (20점). 서로 다른 두 실수  $a, b$  에 대하여, 세 벡터  $(t, a, b), (a, t, b), (a, b, t)$  가 일차독립이기 위한 실수  $t$  의 조건을 구하시오.

문제 4 (20점). 행렬  $A, B$  의 행렬식이 다음과 같이 주어 졌을 때, 아래 행렬들의 행렬식을 구하시오.

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{pmatrix} = 5, \quad \det B = \det \begin{pmatrix} a & c & e \\ 1 & 2 & 3 \\ b & d & f \end{pmatrix} = 11$$

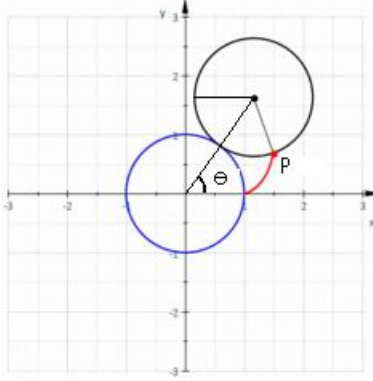
$$(a) \begin{pmatrix} a+b & 1 & b \\ c+b & 1 & d \\ e+b & 1 & f \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} a & b & 2 \\ c & d & 3 \\ e & f & 4 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} a & c & e \\ 3 & 6 & 9 \\ b & d & f \end{pmatrix} \quad (d) \begin{pmatrix} 2a & 2b & 2 \\ 2c & 2d & 2 \\ 2e & 2f & 2 \end{pmatrix}$$

문제 5 (20점). 두 벡터  $\mathbf{a} = (1, 1, 0)$  와  $\mathbf{b} = (-2, 0, 0)$  가 주어져 있다. 다음과 같이 정의된 선형사상  $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  에 대응되는 행렬을 구하시오.

$$L(\mathbf{x}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{x}) \times \mathbf{a} + \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{x})$$

**문제 6** (30점). 단위원  $C : x^2 + y^2 = 1$  둘레를 반지름이 1인 동전이 접하면서 반시계방향으로 굴러간다고 하자. 맨 처음 동전의 중심이  $(2, 0)$  에 놓여 있고, 이 때  $(1, 0)$  에 놓여 있던 동전 상의 점을  $P$  라 하자.

- (a) (10점) 점  $P$  의 자취를 매개화하시오.
- (b) (10점) 점  $P$  의 자취의 길이를 구하시오.
- (c) (10점) 이 곡선이 수직 접선을 가지는 1사분면 위의 점을 구하시오.  
(수직 접선은  $x = k$  ( $k$  는 상수) 형태의 접선을 뜻한다.)



**문제 7** (25점). 포물선

$$y = \frac{1}{2}x^2, \quad 0 \leq x \leq 1$$

의 중심의 좌표를 구하시오.

**문제 8** (20점). 양의 실수  $t$  에 대하여, 곡선

$$X(t) = (t, t^2, \frac{2}{3}t^3)$$

의 곡률  $\kappa(t)$  을 구하시오.

**문제 9** (20점). 곡선

$$X : x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

의 밀도함수가  $\mu(x, y) = x^3 + y^3$  일 때, 곡선  $X$  의 질량을 구하시오.