

**수학 및 연습 1 기말고사**  
(2015년 6월 6일 오후 1:00-3:00)

학번:	이름:
-----	-----

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

**문제 1.** [20점] 좌표공간  $\mathbb{R}^3$  의 두 벡터  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  는 서로 수직이 아니고,  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$  을 만족한다고 하자. 이 때 세 벡터  $\mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$  는 일차독립임을 보이시오.

**문제 2.** [20점] 3차원 공간에서 세 점  $A(1, 2, 3), B(2, 4, 5), Q(3, 4, 6)$  를 지나는 평면에 대하여 평면 밖의 한 점  $P$  에서 이 평면에 내린 수선의 발이  $Q$  라고 한다.  $\overrightarrow{AP}$  의 길이가 8일 때,  $\overrightarrow{AP}$  와  $\overrightarrow{AB}$  가 이루는 각의 크기  $\theta$  를 구하시오.

**문제 3.** [20점] 다음 물음에 답하시오.

(a) (10점) 가역행렬  $G$  에 대하여 다음 등식을 만족시키는 행렬  $A$  의 행렬식을 구하시오.

$$G^{-1}AG = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -2 & -3 & -5 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

(b) (10점)  $AB = 2BA$  를 만족하는 가역행렬  $A, B$  는 존재하지 않음을 보이시오.

**문제 4.** [30점]  $\mathbb{R}^3$  의 2개의 벡터  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  는 시점이 원점이면서 서로 수직인 단위벡터이고, 평면  $\alpha$  는  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  를 모두 포함하는 평면이다. 다음과 같이 사상  $L$  을 정의할 때, 물음에 답하시오.

$$\begin{aligned} L: \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{x} &\longmapsto L(\mathbf{x}) = \mathbf{v} \end{aligned}$$

여기서  $\mathbf{v}$  는  $\mathbf{x}$  를 평면  $\alpha$  로 정사영한 벡터이다.

(a) (10점) 벡터  $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2$  와 같이 표현될 때,

$$a_1 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_1, \quad a_2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_2$$

임을 증명하시오.

(b) (10점) 사상  $L$  이 선형사상임을 보이시오.

(c) (10점)  $L$  에 대응하는 행렬  $M$  을  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  를 써서 나타내시오.

**문제 5.** [20점] 평면  $x + y + z = 1$  위의 네 점  $A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(-1, 1, 1), D(1, -1, 1)$  를 밑면의 네 점으로 하고  $E(2, 2, 2)$  를 나머지 꼭지점으로 하는 사각뿔의 부피를 구하시오.

**문제 6.** [25점] 좌표평면 위의 영역  $\{(x, y) \mid x > 2y\}$  에서 정의된 곡선  $e^{x-2y} = 4(x-y)^2 - x^2$  을  $t = x - 2y$  로 매개화하고  $t = 1$  일 때 속도벡터를 구하시오.

**문제 7.** [25점] 곡선  $X(t) = e^t(\cos t, \sin t, 1)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  의 길이를 구하고, 점  $(1, 0, 1)$  로부터 켄 곡선의 길이가  $\sqrt{3}$  인 점에서 곡률벡터를 구하시오.

**문제 8.** [20점] 현수선  $y = \frac{1}{2} \cosh 2x$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) 를 호의 길이로 매개화하시오. 이때, 매개변수의 범위 구하시오.

**문제 9.** [20점] 극좌표계에서 식

$$r = 1 - 2 \cos \theta$$

으로 주어진 곡선  $X$  의 개형을 그리고, 이 곡선에 의해 나뉘어진 영역 중에서 점  $(-2, 0)$  을 포함하는 영역의 넓이를 구하시오.