

2013-S 수학 및 연습 기말고사 문법답안

[#1] (방법1) 주어진 직선 m 의 방향벡터 $V = (1, 1, 4) - (2, 0, 1) = (-1, 1, 3)$

정사영한 직선의 방향벡터 $W = V - P_{\text{in}}(V)$ (n 은 평면의 법선벡터)

$$\therefore W = (-1, 1, 3) - \frac{(1, 1, -2) \cdot (-1, 1, 3)}{(1, 1, -2) \cdot (1, 1, -2)} (1, 1, -2)$$

$$= (-1, 1, 3) - (-1) \cdot (1, 1, -2) = (0, 2, 1)$$

// 15

또한 직선 m 의 평면 $x + y - 2z = -3$ 의 교점을 구하면, m 의 방정식

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-4}{3} \text{로부터 } (x, y, z) = (-t+1, t+1, 3t+4)$$

$$\therefore -t+1 + t+1 - 2(3t+4) = -3$$

$$\therefore t = -\frac{1}{2} \quad \therefore \text{교점} = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2} \right)$$

$$\therefore \text{구하려는 직선의 방정식은 } x = \frac{3}{2}, \frac{y-\frac{1}{2}}{2} = z - \frac{5}{2} \text{ 이다.}$$

// 25

(채점기준) • 정사영된 직선 위의 한 점을 올바르게 구하면 10점

• 정사영된 방향벡터를 올바르게 구하면 15점

• 직선의 방정식을 마지막에 잘못 구한 경우 -5점
(ex $x = \frac{3}{2}$ 를 빼먹는 등의 실수)

(방법 2) 각 점 $A(2, 0, 1)$ 과 $B(1, 1, 4)$ 에서 평면 $x+y-2z = -3$ 에 내린 수선의 발을 구하라.

$(2, 0, 1) + t(1, 1, -2) = (2+t, t, 1-2t)$ 가 평면 위의 점이어야 하므로

$$2+t+t-2(1-2t) = -3 \Rightarrow t = -\frac{1}{2}$$

마찬가지로 $(1, 1, 4) + s(1, 1, -2) = (1+s, 1+s, 4-2s)$ 가 평면 위의 점이므로

$$1+s+1+s-2(4-2s) = -3 \Rightarrow s = \frac{1}{2}$$

두 수선의 발은 $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 2\right)$, $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 3\right)$ 이다.

따라서 정사영된 직선의 방향벡터는 $(0, 2, 1)$ 이다.

$$\therefore x = \frac{3}{2}, \quad \frac{y - \frac{3}{2}}{2} = z - 3$$

(채점기준) • 정사영된 직선 삼의 두점을 구하는 과정이 각각 10점

• 방향벡터와 직선식을 올바르게 써야 만점.

#2. (a) $X \times b = -b \times X$ 이므로,

$$L(X) = (a \times X + X \times b) \times \mathbb{C}$$

$$= (a \times X - b \times X) \times \mathbb{C}$$

$$= \{(a-b) \times X\} \times \mathbb{C}$$

$$= \{(1, -1, 1) \times X\} \times \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} a-b &= (2013, 2012, 2011) - (2012, 2013, 2010) \\ &= (1, -1, 1) \end{aligned}$$

$$L(\mathbb{E}_1) = \{(1, -1, 1) \times (1, 0, 0)\} \times (-1, 1, 1) = (0, -1, 1)$$

$$L(\mathbb{E}_2) = \{(1, -1, 1) \times (0, 1, 0)\} \times (-1, 1, 1) = (-1, 0, 1)$$

$$L(\mathbb{E}_3) = \{(1, -1, 1) \times (0, 0, 1)\} \times (-1, 1, 1) = (-1, 1, -2)$$

따라서, L 이 대응 되는 행렬, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \bigg|_{+10}$

(재정기준) A 가 틀렸거나, $L(\mathbb{E}_1), L(\mathbb{E}_2), L(\mathbb{E}_3)$ 를 열벡터로 쓰지 않은 경우
0점 처리함.

$$\#2. (b) \quad M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - M \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$M \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{이므로,}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{이고,} \quad \det M = 4 \quad \text{이다.} \quad // 8$$

평행육면체의 부피는 평행이동에 관계없으므로,

$$\text{Vol}(B) = \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right| = 4$$

$$\text{따라서} \quad \text{Vol}(M(B)) = |\det M| \cdot \text{Vol}(B) = 4 \times 4 = 16 \quad \text{이다.} \quad // 15$$

(채점기준) • 행렬 M 을 제대로 구하고 $\det M$ 까지 제대로 구한 경우 +8점.

• $\text{Vol}(B)$ 가 정확히 맞은 경우에만 +7점

[#3]

$$\begin{aligned}\det \begin{pmatrix} t & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 7 & 3 & t \end{pmatrix} &= t \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & t \end{pmatrix} - (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & t \end{pmatrix} + 2 \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \\ &= t(t-6) + (3t-14) + 2 \cdot (-2) \\ &= t^2 - 3t - 10 \\ &= (t-5)(t+2)\end{aligned}$$

$$\therefore \det A \neq 0 \iff t \neq 5, t \neq -2$$

// 10

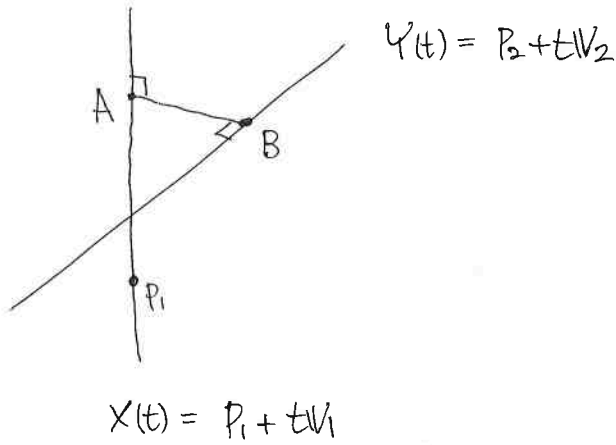
$$t=3 \text{ 일 때 } \det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = \frac{1}{(3-5)(3+2)} = -\frac{1}{10}$$

// 20

(채점기준) • $\det A = t^2 - 3t - 10$ 이 틀린 경우 결론이 맞더라도
점수 없음

• A^{-1} 을 계산하여 $\det A^{-1}$ 을 구한 경우 계산이 틀리면 점수 없음.

#4



최단거리 일 때 벡터를 $B-A$ 라 하면 $B-A$ 는 직선 $X(t)$, $Y(t)$ 에
수직이므로 $B-A \parallel V_1 \times V_2$.

또, $B-A$ 는 $B-P_1$ 을 정사영 한 것으로 볼 수 있으므로,

$$B-A = \frac{(V_1 \times V_2) \cdot (B-P_1)}{|V_1 \times V_2|^2} V_1 \times V_2$$

$$= \frac{(V_1 \times V_2) \cdot (B-P_2) + (V_1 \times V_2) \cdot (P_2-P_1)}{|V_1 \times V_2|^2} V_1 \times V_2$$

$$= \frac{(V_1 \times V_2) \cdot (P_2-P_1)}{|V_1 \times V_2|^2} V_1 \times V_2$$

$$\therefore |B-A| = \frac{|(V_1 \times V_2) \cdot (P_2-P_1)|}{|V_1 \times V_2|}$$

20점

※ 수직임을 언급하면 + 4점

※ $B-A$ 에 절댓값을 붙이지 않으면 4점감점

#5

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + r'^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(2+3\cos t)^2 + (3\sin t)^2} dt && \text{ㄱ 5점} \\
 &= \int_0^{2\pi} \sqrt{13 + 12\cos t} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{13 + 12(2\cos^2 \frac{t}{2} - 1)} dt \\
 &= \int_0^{2\pi} \sqrt{25 - 24\sin^2 \frac{t}{2}} dt = 5 \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \frac{24}{25}\sin^2 \frac{t}{2}} dt \\
 &= 5 \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \frac{24}{25}\sin^2 t} 2dt = 2 \times 10 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{24}{25}\sin^2 t} dt \\
 &= 20 E\left(\frac{25}{24}\right) && \text{ㄴ 20점}
 \end{aligned}$$

※ 상수배 할 때 틀린 경우 (ex) $10E(\frac{25}{24})$ 등...) 5점감점

※ $4E(-24)$, $10E(\frac{25}{24}) + 2E(-24)$ 등도 맞는 답.

#6

접촉평면의 방정식 : $(X(t) - X(\frac{\pi}{2})) \cdot (X'(\frac{\pi}{2}) \times X''(\frac{\pi}{2})) = 0$

5점

$$X(\frac{\pi}{2}) = (0, 2\sqrt{3}, 2)$$

5점

$$X'(\frac{\pi}{2}) = (-1, -\frac{2}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3})$$

5점

$$X''(\frac{\pi}{2}) = (0, -\frac{13}{18}\sqrt{3}, -\frac{13}{18})$$

5점

$$X'(\frac{\pi}{2}) \times X''(\frac{\pi}{2}) = \left(\frac{52}{27}, -\frac{13}{18}, \frac{13\sqrt{3}}{18} \right) = \frac{13}{54} (8, -3, 3\sqrt{3})$$

5점

$$8(x-0) - 3(y-2\sqrt{3}) + 3\sqrt{3}(z-2) = 0$$

$$8x - 3y + 3\sqrt{3}z = 0$$

#7

$$\text{곡선의 질량} = \int_0^1 t \cdot |x'(t)| dt$$

$$= \int_0^1 t \cdot \sqrt{2} \cdot \cosh t dt \quad \left] \begin{array}{l} 5 \text{ 점} \\ 12 \end{array} \right.$$

$$= \sqrt{2} \left(1 - \frac{1}{e}\right) = M \quad \left] \begin{array}{l} 10 \text{ 점} \\ 12 \end{array} \right.$$

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \int_0^1 t \cdot \cosh t |x'(t)| dt$$

$$= \frac{1}{M} \int_0^1 t \cdot \sqrt{2} \cdot \cosh^2 t dt \quad \left] \begin{array}{l} 5 \text{ 점} \\ 12 \end{array} \right.$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8M} (3 + 2 \sinh 2 - \cosh 2) \quad \left] \begin{array}{l} 15 \text{ 점} \\ 12 \end{array} \right.$$

25 점

#8

주어진 두 곡선

$$r = 2(1 + \cos \theta), \quad r = 2 + \cos \theta \text{ 는}$$

2π 를 주기로 가지며,

$-\pi \leq \theta \leq \pi$ 에서 생각할 때

$$2 + 2\cos \theta \geq 2 + \cos \theta \Leftrightarrow \cos \theta \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad \underline{15}$$

$$\therefore \text{면적} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \{2(1 + \cos \theta)\}^2 - \frac{1}{2} \{2 + \cos \theta\}^2 d\theta \quad \underline{10}$$

$$= 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (3\cos^2 \theta + 4\cos \theta) d\theta \quad (\text{무한수}) \quad \underline{10}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos^2 \theta + 4\cos \theta d\theta$$

$$= \frac{3}{4}\pi + 4. \quad \underline{20}$$

#9.

$$X(t) = (t, \cosh t) \quad \text{라 놓자.}$$

$$\begin{aligned} |K(t)| &= \frac{1}{|X'(t)|} \left(\frac{X'(t)}{|X'(t)|} \right)' \\ &= \frac{1}{\cosh t} \left(\frac{(1, \sinh t)}{\cosh t} \right)' \end{aligned}$$

$$= \frac{(-\tanh t, \operatorname{sech} t)}{\cosh^2 t}$$

10 점

$$\therefore K(t) = |K(t)| = \frac{1}{\cosh^2 t}$$

$t=0$ 일 때 $\frac{1}{\cosh^2 t}$ 이 최대가 된다.

$$K(0) = 1, \quad K(0) = (0, 1)$$

15 점

점속원의 방정식 :

$$x^2 + (y-2)^2 = 1$$

20 점