

Quiz 3 (11월 8일 금 5,6 교시)

[2013년 2학기 수학 및 연습 2]
(시간은 20분이고, 20점 만점입니다.)

* 답안지에 학번과 이름을 쓰시오. 답안 작성시 풀이과정을 명시하시오.

1. (6점) 다음 반복적분의 값을 구하시오.

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 ye^{-x^5} dx dy$$

2. (7점) 좌표공간에서 다음 식을 만족하는 영역의 부피를 구하시오.

$$0 \leq x^2 + y^2 + z^2 - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq z$$

3. (7점) 좌표평면에서 다음 식을 만족하는 영역의 넓이를, 평면 벡터장의 발산정리를 이용하여 구하시오.

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \leq 1$$

Quiz 1 모범답안 및 채점기준 예시

$$1. \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 ye^{-x^5} dx dy = \int_0^1 \int_0^{x^2} ye^{-x^5} dy dx \quad (3\text{점})$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2} x^4 e^{-x^5} dx = \frac{1}{10} \left(1 - \frac{1}{e} \right) \quad (6\text{점})$$

2. 구면좌표계로 바꾸면 주어진 부등식은

$$1 \leq \rho \leq 1 + \cos \phi, \quad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$$

로 바꿔 쓸 수 있다. 따라서, 영역의 부피는

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^{1+\cos \phi} \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

(4점)

위의 적분을 계산하면 답은 $\frac{4\pi}{3}$ 이 된다. (7점)

3. 주어진 곡선의 위치벡터를 $X(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t), (0 \leq t \leq 2\pi)$ 로 놓으면, $X'(t) = 3(-\cos^2 t \sin t, \sin^2 t \cos t)$ 이고, 법선벡터 $N(t) = 3(\sin^2 t \cos t, \cos^2 t \sin t)$ 이다. (2점)

곡선내부의 영역을 D 라 하면 발산정리에서

$$\text{area}(D) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} X(t) \cdot N(t) dt$$

(2점)

위의 적분 값을 계산하면 구하려는 영역의 넓이는 $\frac{3\pi}{8}$ 이다. (2점)