

Quiz 3 (11월 7일 금 5, 6 교시)

[2014년 2학기 수학 및 연습 2]
(시간은 20분이고, 20점 만점입니다.)

* 답안지에 학번과 이름을 쓰시오. 답안 작성시 풀이과정을 명시하시오.

1. (5점) 다음 정적분을 구하시오.

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \sinh(1+x^3) dx dy.$$

2. (8점) 좌표공간에서 다음 부등식에 의하여 만들어지는 영역의 부피를 구하시오.

$$(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \leq z, \quad x^2 + y^2 \leq 12 - z, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

3. (7점) 벡터장

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (yz^2 \cos x, z^2 \sin x + z \sinh(1+yz), 2yz \sin x + y \sinh(1+yz))$$

와 곡선

$$X(t) = (t, -\cos(2t), 1 - 2\sin t), \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

에 대하여, 선적분 $\int_X \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ 를 구하시오.

Quiz 3 모범답안 및 채점기준 예시

1. 적분영역을 바꾸면

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \sinh(1+x^3) dx dy &= \int_0^1 \int_0^{x^2} \sinh(1+x^3) dy dx \quad (2\text{점}) \\ &= \int_0^1 x^2 \sinh(1+x^3) dx \\ &= \frac{1}{3}(\cosh 2 - \cosh 1) \quad (5\text{점})\end{aligned}$$

2. 원기등좌표계를 이용하여 주어진 영역을 다시 나타내면

$$r^3 \leq z \leq 12 - r^2, \quad 0 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2 \quad (2\text{점})$$

이므로, 구하려는 부피는

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \int_0^2 \int_{r^3}^{12-r^2} r dz dr d\theta &\quad (4\text{점}) \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^2 (12 - r^2 - r^3) r dr \\ &= \frac{\pi}{2} \left(6r^2 - \frac{r^4}{4} - \frac{r^5}{5} \Big|_0^2 \right) = \frac{34}{5}\pi \quad (8\text{점})\end{aligned}$$

이다.

3. $\phi(x, y, z) = yz^2 \sin x + \cosh(1 + yz) + C$ 라고 하자. (C 는 상수)

그러면 $\text{grad } \phi = \mathbf{F}$ 가 된다. (3점)

선적분의 기본정리에 의하여

$$\int_X \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \phi(X(2\pi)) - \phi(X(0)) = 0 \quad (7\text{점})$$