

Quiz 3 (11월 8일 금 7, 8 교시)

[2013년 2학기 수학 및 연습 2]
(시간은 20분이고, 20점 만점입니다.)

* 답안지에 학번과 이름을 쓰시오. 답안 작성시 풀이과정을 명시하시오.

1. (7점) 좌표평면에서 식

$$\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4}, \quad \cos x \leq y \leq \sin x$$

으로 주어지는 영역의 중심의 x 좌표를 구하시오.

2. (7점) 영역 $D = \{(x, y, z) \mid 0 \leq y \leq 4, \sqrt{y} \leq x \leq 2, 0 \leq z \leq 1\}$ 에 대하여 다음 적분값을 구하시오.

$$\iiint_D \frac{\sin(x^3)}{e^z} dx dy dz$$

3. (6점) 영역 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ 와 벡터장

$$\mathbf{F}(x, y) = (x^2 - 2y \cos x, y - y^2 \sin x)$$

에 대하여 $\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$ 를 구하시오. (단, \mathbf{n} 은 D 의 경계에서 영역의 바깥쪽으로 향하는 단위 법벡터이다.)

Quiz 3 모범답안 및 채점기준

1. 구하고자 하는 영역의 넓이는

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \int_{\cos x}^{\sin x} 1 \, dy \, dx = 2\sqrt{2}$$

이고, (4점)

영역의 중심의 x 좌표는

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \int_{\cos x}^{\sin x} x \, dy \, dx = \frac{3\pi}{4}$$

이다. (7점)

(단, 중심의 좌표를 구할 때, 대칭성을 아무 언급 없이 사용할 경우 2점 감점)

2. 주어진 적분식은

$$\begin{aligned} \int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \int_0^1 \frac{\sin(x^3)}{e^z} \, dz \, dx \, dy &= \int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \left(1 - \frac{1}{e}\right) \sin(x^3) \, dx \, dy & (4점) \\ &= \left(1 - \frac{1}{e}\right) \int_0^2 \int_0^{x^2} \sin x^3 \, dx \, dy \\ &= \frac{(1 - \cos 8)(e - 1)}{3e} & (7점) \end{aligned}$$

3. 발산정리에 의하여,

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds &= \iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV_2 & (2점) \\ &= \iiint_D (2x + 2y \sin x + 1 - 2y \sin x) \, dx \, dy & (4점) \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (2r \cos \theta + 1) r \, d\theta \, dr \\ &= \pi & (6점) \end{aligned}$$