

Quiz 3 (11월 4일 수 7, 8 교시)

[2015년 2학기 수학 및 연습 2]  
(시간은 20분이고, 20점 만점입니다)

\* 답안지에 학번과 이름을 쓰시오. 답안 작성시 풀이과정을 명시하시오.

1. (6점) 다음 적분의 값을 구하시오.

$$\int_0^1 \int_0^{\arcsin y} x \, dx dy$$

2. (6점)  $\mathbb{R}^2$  의 영역  $D : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$  와 벡터장

$$\mathbf{F}(x, y) = (x^3 - x + x \sin y, \quad e^x + y + \cos y)$$

에 대하여  $\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds$  의 값을 구하시오. (단,  $\mathbf{n}$  은  $\partial D$  에서 영역  $D$  를 벗어나는 방향의 단위법벡터장이다.)

3. (8점)  $\mathbb{R}^3$  에서 다음 영역의 부피를 구하시오.

$$0 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

### Quiz 3 모범답안 및 채점기준 예시

1.  $x$ 는 연속함수이므로, 푸비니 정리에 의해

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \int_0^{\arcsin y} x \, dx \, dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\sin x}^1 x \, dy \, dx \quad (3\text{점}) \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x - x \sin x \, dx \\
 &= \frac{\pi^2}{8} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx \\
 &= \frac{\pi^2}{8} - \left[ -x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx \\
 &= \frac{\pi^2}{8} - 1 \quad (3\text{점})
 \end{aligned}$$

2.  $\operatorname{div} \mathbf{F} = 3x^2$  이므로 (2점), 발산정리에 의해

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds &= \iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV_2 \\
 &= \iiint_D 3x^2 \, dV_2 \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{2}} 3r^2 \cos^2 \theta \, r \, dr \, d\theta \\
 &= \int_1^{\sqrt{2}} 3r^3 \, dr \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta \\
 &= \frac{9}{4} \pi \quad (4\text{점})
 \end{aligned}$$

3. 주어진 부등식을 구면좌표계로 바꾸면,  $0 \leq \rho \leq 1 + \cos \varphi$  이므로 (3점), 영역의 부피는

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{1+\cos \varphi} \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta \quad (2\text{점}) \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{3} (1 + \cos \varphi)^3 \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta
 \end{aligned}$$

$u = \cos \varphi$  로 치환하면,

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{3} (1+u)^3 \, du d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{12} (1+u)^4 \right]_{-1}^1 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{16}{12} d\theta = \frac{8\pi}{3} \quad \text{이다.} \quad (3\text{점}) \end{aligned}$$