

Quiz 3 (11월 8일 금 3, 4 교시)

[2013년 2학기 수학 및 연습 2]

(시간은 20분이고, 20점 만점입니다.)

* 답안지에 학번과 이름을 쓰시오. 답안 작성시 풀이과정을 명시하시오.

1. (10점) 다음 적분을 구하시오.

(a) (5점) $\iint_R \sin(9x^2 + 4y^2) \, dxdy$
(단, $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid 9x^2 + 4y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$.)

(b) (5점) $\iint_R (x+y)e^{x^2-y^2} \, dxdy$
(단, R 은 직선들 $x-y=0, x+y=0, x-y-2=0, x+y-3=0$ 으로 둘러싸인 영역.)

2. (5점) xy -평면의 위쪽, 구면 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 의 내부와 곡면 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 의 아래 부분의 공통 부분을 R 이라고 할 때, R 의 부피를 구하여라.

3. (5점) 영역 D 는 극좌표계로 주어진 곡선 $r = 1 + \cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$)의 내부이다. 영역 D 에서 정의된 벡터장

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(3x - \frac{x}{1+y^2}, e^x + \arctan y \right)$$

와 D 의 경계에서 D 의 외부로 향하는 단위법벡터장을 \mathbf{n} 이 주어졌을 때, 다음 적분을 구하시오.

$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds$$

Quiz 3 모범답안 및 채점기준 예시

1. (a) $x = \frac{r}{3} \cos \theta$, $y = \frac{r}{2} \sin \theta$ 이라 치환하면, 주어진 적분은

$$\begin{aligned} \iint_R \sin(9x^2 + 4y^2) \, dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \sin(r^2) \cdot \frac{r}{6} \, dr d\theta \quad (3\text{점}) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{-1}{12} \cos(r^2) \right]_0^1 d\theta = \frac{\pi}{24} (1 - \cos(1)) \quad (5\text{점}) \end{aligned}$$

- (b) $u = x + y$, $v = x - y$ 라고 하자.

그러면 $x = \frac{u+v}{2}$, $y = \frac{u-v}{2}$ 이고, $\left| \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = \frac{1}{2}$.

따라서 주어진 적분은

$$\begin{aligned} \iint_R (x+y)e^{x^2-y^2} \, dx dy &= \int_0^2 \int_0^3 \frac{u}{2} e^{uv} \, du dv = \int_0^3 \int_0^2 \frac{u}{2} e^{uv} \, dv du \quad (3\text{점}) \\ &= \int_0^3 \left[\frac{1}{2} e^{uv} \right]_0^2 du = \int_0^3 \frac{1}{2} (e^{2u} - 1) \, du \\ &= \frac{1}{4} (e^6 - 7) \quad (5\text{점}) \end{aligned}$$

2. 구면좌표계로 치환하여 생각하면,

$$\begin{aligned} \iiint_R dV_3 &= \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \rho^2 \sin \phi \, d\rho d\phi d\theta \quad (3\text{점}) \\ &= \left[\frac{1}{3} \rho^3 \right]_0^2 [-\cos \phi]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} [\theta]_0^{2\pi} = \frac{8\sqrt{2}}{3} \pi \quad (5\text{점}) \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds &= \int \int_D \operatorname{div} \mathbf{F} \quad (1 \text{ 점}) \\ &= \int \int_D 3 \, dx \, dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos \theta} 3r \, dr \, d\theta \quad (3 \text{ 점}) \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{3}{2} r^2 \right]_0^{1+\cos \theta} \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{3}{2} (1 + \cos \theta)^2 \, dr \, d\theta = \frac{9\pi}{2} \quad (5 \text{ 점})\end{aligned}$$