

2016년 여름학기 수학 및 연습 2 001 강좌 세 번째 퀴즈

7월 18일(월) 12:30-12:50

- ⊙ 시험시간 = 20분, 총점 = 20점.
- ⊙ 모든 답안에 가능한 자세히 풀이 과정을 적으시오.

1. (10점) 다음 적분을 구하시오.

(a) (5점) $\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2y) e^{x \sin y} dy dx$

(b) (5점) $\iint_R (x+y) e^{x^2-y^2} dx dy$

(단, R 은 직선들 $x-y=0$, $x+y=0$, $x-y=2$, $x+y=3$ 으로 둘러싸인 영역.)

2. (5점) 좌표공간에서 다음과 같은 부등식을 만족하는 영역의 부피를 구하시오.

$$(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \leq z, \quad x^2 + y^2 \leq 12 - z, \quad y \geq 0$$

3. (5점) 좌표평면의 영역 $R = \{(x, y) \mid x^2 - 4 \leq y \leq -x^2 + 4\}$ 을 생각하자.

이 때, 벡터장 $\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$ 에 대하여 다음 적분을 구하시오.

$$\int_{\partial R} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$$

Quiz 3 모범답안 및 채점기준 예시

1. (a) 주어진 그대로는 원시함수를 구하기 어려우므로 적분 순서를 바꾼다.

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2y) e^{x \sin y} dy dx &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \sin y \cos y e^{x \sin y} dx dy \quad (2\text{점}) \\
 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos y e^{x \sin y}]_0^1 dy \\
 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos y e^{\sin y} - \cos y) dy \\
 &= 2 [e^{\sin y} - \sin y]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2e - 4 \quad (5\text{점})
 \end{aligned}$$

- (b) $u = x + y$, $v = x - y$ 라고 하자.

그러면 $x = \frac{u+v}{2}$, $y = \frac{u-v}{2}$ 이고, $\left| \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = \frac{1}{2}$.

따라서 주어진 적분은

$$\begin{aligned}
 \iint_R (x+y) e^{x^2-y^2} dx dy &= \int_0^2 \int_0^3 \frac{u}{2} e^{uv} du dv = \int_0^3 \int_0^2 \frac{u}{2} e^{uv} dv du \quad (3\text{점}) \\
 &= \int_0^3 \left[\frac{1}{2} e^{uv} \right]_0^2 du = \int_0^3 \frac{1}{2} (e^{2u} - 1) du \\
 &= \frac{1}{4} (e^6 - 7) \quad (5\text{점})
 \end{aligned}$$

2. 원기둥좌표계를 이용하여 주어진 영역을 다시 나타내면

$$r^3 \leq z \leq 12 - r^2, \quad 0 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

이므로(2점), 부피는

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi \int_0^2 \int_{r^3}^{12-r^2} r dz dr d\theta &= \pi \int_0^2 (12 - r^2 - r^3) r dr \\
 &= \pi \left(6r^2 - \frac{r^4}{4} - \frac{r^5}{5} \right) \Big|_0^2 = \frac{68}{5} \pi \quad (5\text{점})
 \end{aligned}$$

임을 알 수 있다.

3. R 의 안쪽에 원점이 포함되므로, 아주 작은 $\varepsilon > 0$ 에 대하여 영역

$$D := R - \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < \varepsilon^2\}$$

에 발산 정리를 적용하여

$$\begin{aligned} 0 &= \iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV_2 \\ &= \int_{\partial R} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds + \int_{x^2+y^2=\varepsilon^2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds \end{aligned}$$

을 얻고(2점), 따라서

$$\begin{aligned} \int_{\partial R} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds &= - \int_{x^2+y^2=\varepsilon^2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds \\ &= - \int_{x^2+y^2=\varepsilon^2} \frac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{\varepsilon^2} \cdot \left(-\frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{\varepsilon} \right) ds = 0 \end{aligned}$$

이다. (5점)

(R 에서 원점을 뺀 영역을 생각하지 않고, 그냥 발산 정리를 적용하면 무조건 0 점)