

Quiz 3 (11월 7일 금 7,8교시)

[2014 수학 및 연습 2]
(시간은 20분이고, 20점 만점입니다)

* 답안지에 학번과 이름을 쓰고 답안 작성시 풀이과정을 명시하시오.

1. (7점) 영역 $D = \{(x, y) : 2x^2 + 2xy + 5y^2 \leq 1\}$ 의 넓이를 구하시오

2. (6점) $B := \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ 에 대하여 다음을 구하시오.

$$\iiint_B \frac{2y^2 + z^2}{x^2 + 4y^2 + z^2} dx dy dz$$

(Hint: 함수 $G(x, y, z) = (z, y, x)$ 를 생각하시오.)

3. (7점) 벡터장

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y \cos z - yze^x, x \cos z - ze^x, -xy \sin z - ye^x)$$

와 곡선

$$X(t) = (\cos t, \sin t, t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

에 대하여, 선적분 $\int_X \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ 를 구하시오.

Quiz 3 모범답안 및 채점기준 예시

1. $2x^2 + 2xy + 5y^2 = (x + 2y)^2 + (x - y)^2$ 이므로
 $u := x + 2y, v := x - y$ 라고 하면 (3점)

$$\iint_D dx dy = \iint_{u^2+v^2 \leq 1} \frac{1}{3} du dv = \frac{\pi}{3}$$
 (7점)

2. $I := \iiint_{G(B)} \frac{2y^2 + x^2}{x^2 + 4y^2 + z^2} dx dy dz$
 $= \iiint_B \frac{2y^2 + z^2}{z^2 + 4y^2 + x^2} dx dy dz$ (3점)
 $\stackrel{G(B)=B}{\Rightarrow} 2I = \iiint_B \frac{x^2 + 2y^2}{x^2 + 4y^2 + z^2} dx dy dz + \iiint_B \frac{z^2 + 2y^2}{x^2 + 4y^2 + z^2} dx dy dz$
 $= \iiint_B \frac{x^2 + 4y^2 + z^2}{x^2 + 4y^2 + z^2} dx dy dz = \text{vol}(B) = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow I = \frac{2\pi}{3}$ (6점)

3. $\phi(x, y, z) = xy \cos z - yze^x + C$ 라고 하자. (C 는 상수)

그러면 $\text{grad } \phi = \mathbf{F}$ 가 된다. (3점)

선적분의 기본정리에 의하여

$$\int_X \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \phi(X(1, 0, 2\pi)) - \phi(X(1, 0, 0)) = 0 \quad (7점)$$