

## Advanced Calculus 2 003 Quiz 3 모범답안 및 채점기준

Problem1.

(3점)

다음 다중적분값을 구하여라.

$$\int_0^3 \int_{x^2}^9 x^3 e^{y^3} dy dx$$

**Solution.**

$$\begin{aligned} \int_0^3 \int_{x^2}^9 x^3 e^{y^3} dy dx &= \int_0^9 \int_0^{\sqrt{y}} x^3 e^{y^3} dx dy \\ &= \int_0^9 \frac{1}{4} y^2 e^{y^3} dy \\ &= \frac{1}{12} (e^{y^3} - 1) \end{aligned}$$

채점기준

푸비니 정리를 정확히 사용하였으나 계산실수 시 부분점수 2점

푸비니 정리의 부정확한 사용의 경우 (정의역 범위 실수 등) 부분점수 없음

사소한 실수시 1점감점

Problem2.

(4점)

삼차원 좌표공간의 영역  $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$  에서 밀도 함수  $\mu(x, y, z) = z$  로 주어져 있다.

이 때 영역  $R$  의 질량중심의  $z$  좌표  $\bar{z}$  를 구하여라.

**Solution.**

$$\begin{aligned} \text{총 질량 } M &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \rho \cos \phi \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi \\ &= \frac{\pi}{8} \int_0^{\pi/2} \sin \phi \cos \phi d\phi = \frac{\pi}{16} \\ M\bar{z} &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \rho^2 \cos^2 \phi \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi \\ &= \frac{\pi}{10} \int_0^{\pi/2} \sin \phi \cos^2 \phi d\phi = \frac{\pi}{30} \Rightarrow \bar{z} = \frac{8}{15} \end{aligned}$$

### 채점기준

$M, M\bar{z}$  를 정확히 계산했을 시 **2점씩**

질량이 아니라 부피를 구하고,  $M\bar{z}$  대신  $M$  을 구한 경우 **총 2점**

치환적분식을 정확히 쓰지 않은 경우 ( $z = \rho \cos \phi$  혹은  $\rho^2 \sin \phi$  중 하나라도 정확하지 않은 경우 등) **부분점수 없음**

### Problem3.

(3점)

가우스함수  $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$  는 기댓값이 0, 분산이 1인 확률밀도함수임을 보이라.

### Solution

$xg(x)$  는 기함수이므로  $\int_{-\infty}^{\infty} xg(x)dx = 0$  은 자명

$$\begin{aligned} \left( \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx \right)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx \int_{-\infty}^{\infty} g(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)g(y)dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} e^{-r^2/2} r d\theta dr \\ &= \int_0^{\infty} r e^{-r^2/2} dr = 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = 1$  이므로  $g(x)$  는 확률밀도함수이다.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 g(x)dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x (x e^{-x^2/2}) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx \quad (\text{부분적분}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

이므로 분산은 1이다.

### 채점기준

$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = 1$  ,  $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 g(x)dx = 1$  임을 정확히 구하면 **3점**.

$\int_{-\infty}^{\infty} xg(x)dx = 0$  만 쓰는 경우 **부분점수 없음**.

$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = 1$  임을 가정하고 분산만 구하는 경우 **1점**.