

Quiz 1, 2 (10월 10일 금 3, 4 교시)

[2014년 2학기 수학 및 연습 2]

(시간은 30분이고, 40점 만점입니다)

\* 답안지에 학번과 이름을 쓰시오. 답안 작성시 풀이과정을 명시하시오.

1. (7점)  $\mathbb{R}^3$  에서 정의된 함수  $f$  가 다음과 같이 주어져 있다.

$$f(x, y, z) = x^2 + y^3 + xyz.$$

이때, 벡터  $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$  에 대하여  $\mathbf{v}$ -방향미분계수

$$D_{\mathbf{v}}f(1, 1, 1)$$

의 값을 구하시오.

2. (6점) 평면에서 정의된 함수  $f$  를 직교좌표계  $(x, y)$  를 써서 나타낼 때에는  $f(x, y)$  로 쓰고, 극좌표계  $(r, \theta)$  를 써서 나타낼 때에는  $f(r, \theta)$  로 쓰기로 할 때, 아래의 등식에서 실수  $a, b, c, d$  를 결정하시오.

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \theta} \right|_{(r, \theta) = (1, \frac{\pi}{3})} = a \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x, y) = (c, d)} + b \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x, y) = (c, d)}$$

3. (7점) 다음 식으로 주어진 곡면 위의 점  $(1, 7, 2)$  에서 접평면의 방정식을 구하시오.

$$2y - z^3 - 3xz = 0$$

4. (7점) 원점에서 함수  $f(x, y) = e^{x^2/2} \cos y$ 의 4차 근사다항식을 구하시오.

5. (6점) 다음 함수의 극댓점, 극솟점과 안장점을 구하시오.

$$f(x, y) = x^3 + 3xy + y^3$$

6. (7점) 영역  $\{ (x, y) \mid x^2 + 4y^2 = 8 \}$  에서 함수  $f(x, y) = xy$  의 최댓값과 최솟값을 라그랑주 승수법을 이용하여 구하시오.  
(단, 최댓값 및 최솟값의 존재는 증명하지 않아도 됨.)

### Quiz 1, 2 모범답안 및 채점기준 예시

1.  $\text{grad}f(x, y, z) = (2x + yz, 3y^2 + xz, xy)$  (3점)

주어진 함수  $f$  는 미분가능함수이므로,

$$D_{\mathbf{v}}f(1, 1, 1) = \text{grad}f(1, 1, 1) \cdot \mathbf{v} = (3, 4, 1) \cdot (1, 2, 3) = 4 \quad (7점)$$

2.  $f(x, y) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\partial f}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} (-r \sin \theta) + \frac{\partial f}{\partial y} (r \cos \theta) \end{aligned}$$

$(r, \theta) = (1, \frac{\pi}{3})$  이면,  $x = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, y = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  이므로,

$$c = \frac{1}{2}, d = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2점)$$

$$a = -1 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (4점)$$

$$b = 1 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \quad (6점)$$

3. 주어진 곡면은 함수  $f(x, y, z) = 2y - z^3 - 3xz$  의 0-등위면이다.

$$\text{grad}f(x, y, z) = (-3z, 2, -3z^2 - 3x)$$

$\therefore \text{grad}f(1, 7, 2) = (-6, 2, -15)$  가 점  $(1, 7, 2)$  에서의 접평면에 수직인 벡터이다. (3점)

따라서 원하는 접평면의 방정식은 다음과 같다.

$$(-6, 2, -15) \cdot (x - 1, y - 7, z - 2) = 0$$

$$\Rightarrow -6x + 2y - 15z = -22 \quad (7점)$$

4. (1)  $T_4f(x, y)$ 의 정의대로 계산하는 방법. (7점. 부분점수 없음)  
 (2) 테일러 전개의 유일성 사용하는 방법.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \left\{1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!} \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right\} \left\{1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + o(y^4)\right\} \quad (3\text{점}) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{y^2}{2} - \frac{x^2y^2}{4} + \frac{y^4}{24} + o((x^2 + y^2)^2) \end{aligned}$$

따라서, 테일러 전개의 유일성에 의하여 4차 근사다항식은

$$T_4f(x, y) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{y^2}{2} - \frac{x^2y^2}{4} + \frac{y^4}{24}$$

이다. (7점)

(정답을 도출했으나 테일러 전개의 유일성에 관한 언급이 없을 경우 1점 감점.)

5.  $\text{grad}f(x, y) = (3x^2 + 3y, 3x + 3y^2)$  이므로 임계점은  $(0, 0), (-1, -1)$  이다.

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}f_{yx} = 6x6y - 3 \cdot 3$$

이므로  $(0, 0)$  은 안장점이다. 또한,

$$f_{xx}(-1, -1) = -6 < 0, \det f''(-1, -1) = 27 > 0$$

이므로  $(-1, -1)$  은 극댓점이다. (6점)

6.  $g(x, y) := x^2 + 4y^2 - 8$  이라 하면

$$\text{grad}f = \lambda \text{grad}g \rightarrow (y, x) = \lambda(2x, 8y) \quad (2\text{점})$$

$$\rightarrow y = 16\lambda^2y$$

$$y = 0 \rightarrow (x, y) = (0, 0)$$

$$y \neq 0 \rightarrow \lambda = \frac{1}{4}, -\frac{1}{4} \rightarrow y = \frac{x}{2}, -\frac{x}{2}$$

따라서, 영역상의 점은  $(2, 1), (-2, 1), (2, -1), (-2, -1)$  이고 (5점) 최댓값은 2, 최솟값은 -2이다. (7점)