

Quiz 1, 2 (10월 10일 금 5, 6 교시)

[2014년 2학기 수학 및 연습 2]
(시간은 30분이고, 40점 만점입니다)

* 답안지에 학번과 이름을 쓰시오. 답안 작성시 풀이과정을 명시하시오.

1. (7점) 함수

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2 + xy^3}{x^2 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

는 원점에서 연속인지 아닌지 밝히시오.

2. (7점) 점 $P = (1, 1, 0)$ 에서 일급함수 $f(x, y, z)$ 의 값이 가장 빨리 감소하는 방향이 $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$ 이고, \mathbf{v} -방향으로의 f 의 순간변화율은 -2 였다고 한다. 곡선 $X(t) = (t, \cos 2\pi t, \sin \pi t)$ 을 따라 움직이는 어떤 입자가 점 P 를 지날 때, f 의 순간변화율은 얼마인가?

3. (6점) 곡면

$$x^2 - 2xyz + 3z^2 = 4$$

의 점 $(1, 0, -1)$ 에서의 접평면의 방정식을 구하시오.

4. (7점) 원점에서 함수 $f(x, y) = ye^{-xy}$ 의 3차 근사다항식을 구하시오.

5. (6점) 다음 함수의 극댓점, 극솟점과 안장점을 구하시오.

$$f(x, y) = x^2 + xy + 3x + 2y + 5$$

6. (7점) 곡면 $z^2 = xy + 4$ 의 점 중에서 원점에 가장 가까운 점을 구하시오.

(원점과 가장 가까운 점의 존재성은 증명하지 않아도 됨.)

Quiz 1, 2 모범답안 및 채점기준 예시

1. 모든 실수 x, y 에 대하여, $x^2 + y^4 \geq 2|xy^2|$ 이므로,

$$\left| \frac{xy^2(x+y)}{x^2+y^4} \right| \leq \left| \frac{(x^2+y^4)(x+y)}{2(x^2+y^4)} \right| = \frac{1}{2}|x+y|$$

이고, 따라서

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{xy^2(x+y)}{x^2+y^4} \right| \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{2}|x+y| = 0$$

이다. 이로서 f 가 원점에서 연속임을 알 수 있다. (7점)

(단, 산술평균·기하평균의 부등식을 주어진 함수 f 의 분모에 적용할 경우 3점 감점.)

2. $X(1) = P$ 이므로

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=1} f(X(t)) = \text{grad} f(P) \cdot X'(1)$$

를 구하는 문제이다. 주어진 조건에 의해 $\text{grad} f(P) = \frac{c}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$ 인 실수 c 가 존재한다. (2점)

여기에서 $\frac{c}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$ -방향미분계수가 -2 임을 이용하면, $c = -2$ 를 구할 수 있다. (4점)

$X'(t) = (1, -2\pi \sin 2\pi t, \pi \cos \pi t)$ 이므로, 곡선 $X(t)$ 를 따라 움직일 때 P 에서 f 의 순간변화율은

$$\text{grad} f(P) \cdot X'(1) = -\sqrt{2}(-1, 0, 1) \cdot (1, 0, -\pi) = \sqrt{2}(1 + \pi)$$

이다. (7점)

3. $f(x, y, z) = x^2 - 2xyz + 3z^2 - 4$ 라 하면, 주어진 곡면은 f 의 등위곡면이다. 이제

$$\text{grad}f(x, y, z) = (2x - 2yz, -2xz, -2xy + 6z)$$

이므로, 점 $P := (1, 0, -1)$ 에서 구하고자 하는 접평면과 수직인 벡터는 $\text{grad}f(P) = (2, 2, -6)$ 이다. (3점)

따라서 접평면의 방정식은

$$(1, 1, -3) \cdot ((x, y, z) - (1, 0, -1)) = 0,$$

곧 $x + y - 3z = 4$ 이다. (6점)

4. (1) $T_3f(x, y)$ 의 정의대로 계산하는 방법. (7점. 부분점수 없음.)
 (2) 테일러 전개의 유일성 사용하는 방법.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= y\{1 - xy + o(xy)\} \quad (3\text{점}) \\ &= y - xy^2 + o((x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}) \end{aligned}$$

따라서, 테일러 전개의 유일성에 의하여 3차 근사다항식은

$$T_3f(x, y) = y - xy^2$$

이다. (7점)

(정답을 도출했으나 테일러 전개의 유일성에 관한 언급이 없을 경우 1점 감점.)

5. 주어진 함수의 임계점을 구하자. $\text{grad}f(P) = (2x + y + 3, x + 2)$ 이므로 임계점은 $(-2, 1)$ 이다. $\det f''(-2, 1) < 0$ 이므로 헤세판정법에 의해서 점 $(-2, 1)$ 은 안장점이다. 주어진 함수는 극댓점과 극솟점은 없다. (6점)

6. 함수 f, g 를 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ $g(x, y, z) = z^2 - xy - 4$ 로 두자. 라그랑주 승수법을 적용하면

$$(2x, 2y, 2z) = \lambda(-y - x, 2z)$$

이 되는 λ 가 존재한다. (2점) 이로부터 연립방정식 $2x = -\lambda y$, $2y = -\lambda x$, $z = \lambda z$, $z^2 - xy - 4 = 0$ 을 얻는다. 이 연립 방정식을 풀면 $(2, -2, 0), (-2, 2, 0), (0, 0, 2), (0, 0, -2)$ 를 얻는다. (5점) 따라서, 구하는 점은 $(0, 0, 2), (0, 0, -2)$ 이다. (7점)