

Quiz 2 (10월 16일 금 5, 6 교시)

[2015년 2학기 수학 및 연습 2]

(시간은 20분이고, 20점 만점입니다)

* 답안지에 학번과 이름을 쓰시오. 답안 작성시 풀이과정을 명시하시오.

1. (6점) 함수 $f(x, y) = \sin(x^2 - 2y)$ 의 원점에서 2차 근사다항식을 구하시오.
2. (7점) 함수 $f(x, y) = x^2 + y^3 + 2x^2y - 3y$ 의 임계점을 모두 구하고, 그 임계점을 극댓점, 극솟점, 안장점으로 분류하시오.
3. (7점) $x^3 + y^3 = 8$ 일 때 $x^2 + y^2$ 의 최솟값을 구하시오.

Quiz 2 모범답안 및 채점기준 예시

1.

$$\begin{aligned}D_1 f &= 2x \cos(x^2 - 2y) \\D_2 f &= -2 \cos(x^2 - 2y) \\D_1^2 f &= 2 \cos(x^2 - 2y) - 4x^2 \sin(x^2 - 2y) \\D_1 D_2 f &= D_2 D_1 f = 4x \sin(x^2 - 2y) \\D_2^2 f &= -4 \sin(x^2 - 2y)\end{aligned}$$

이므로,

$$f(0, 0) = 0, \quad D_1 f(0, 0) = 0, \quad D_2 f(0, 0) = -2, \quad D_1^2 f(0, 0) = 2,$$

$$D_1 D_2 f(0, 0) = D_2 D_1 f(0, 0) = 0, \quad D_2^2 f(0, 0) = 0$$

이다. (4점)

따라서 구하는 2차 근사다항식은

$$T_2 f((0, 0), (x, y)) = -2y + \frac{1}{2}(2x^2) = -2y + x^2 \text{ 이다. (6점)}$$

2.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 4xy = 0 \quad \text{과} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 + 2x^2 - 3 = 0$$

에서 $2x(1 + 2y) = 0$ 이므로, $x = 0$ 이면 $y = 1, -1$ 이고,

$y = -\frac{1}{2}$ 이면 $x = \frac{3}{2\sqrt{2}}, -\frac{3}{2\sqrt{2}}$ 이다. 그러므로 f 의 임계점은

$$(0, 1), \quad (0, -1), \quad \left(-\frac{3}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right), \quad \left(\frac{3}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$$

이다. (3점)

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} 2 + 4y & 4x \\ 4x & 6y \end{pmatrix}$$

이므로, $\det f''\left(-\frac{3}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right) = \det f''\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right) < 0$ 이므로 $\left(-\frac{3}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$ 과 $\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$ 은 안장점이다. $f''(0, 1)$ 은 양행렬이므로 $(0, 1)$ 은 극솟점이다. $f''(0, -1)$ 은 음행렬이므로 $(0, -1)$ 은 극댓점이다. (7점)

3. 최솟점에서 극솟점이므로, 라그랑주 승수법에 의해 최솟점에서

$$\lambda(2x, 2y) = (3x^2, 3y^2)$$

이다. (3점)

$3x^2y = 3xy^2$ 이므로, $xy = 0$ 이거나 $x = y$ 이다. 그러므로

$$(x, y) = (0, 2), (2, 0), \left(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{4}\right)$$

이다.

$$2\left(\sqrt[3]{4}\right)^2 = \sqrt[3]{128} > 4$$

이므로 $x^2 + y^2$ 의 최솟값은 $(0, 2)$ 이나 $(2, 0)$ 에서 나타나고, 그 최솟값은 4 이다. (7점) (라그랑주 승수법, 헤세 판정법 등을 이용하여 최대, 최소값을 구하는 문제의 답안을 채점할 때, 최대, 최소값의 존재에 관한 (직관적) 설명 또는 (최대최소정리에 근거한) 논증이 없으면 1점을 감점)