

Quiz 2 (10월 11일 금 7, 8 교시)

[2013년 2학기 수학 및 연습 2]

(시간은 20분이고, 20점 만점입니다.)

* 답안지에 학번과 이름을 쓰시오. 답안 작성시 풀이과정을 명시하시오.

1. (7점) 다음 함수의 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서의 2차 근사다항식을 구하시오.

$$f(x, y) = e^x \sin y + \cos(xy)$$

2. (7점) 단위 구면 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 에서 함수

$$f(x, y, z) = x - 2y + 2z$$

의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

3. (6점) 다음과 같이 주어진 함수에 대하여 점 $(r, \theta) = \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ 를 구하시오.

$$x = u^2 + uv, \quad y = u - v^2, \quad u = r \cos \theta, \quad v = r \sin \theta$$

Quiz 2 모범답안 및 채점기준 예시

1. $f(x, y) = e^x \sin y + \cos(xy)$ 이므로

$$f'(x, y) = (e^x \sin y - y \sin(xy), e^x \cos y - x \sin(xy))$$

이고, (2점)

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \sin y - y^2 \cos(xy) & e^x \cos y - \sin(xy) - xy \cos(xy) \\ e^x \cos y - \sin(xy) - xy \cos(xy) & -e^x \sin y - x^2 \cos(xy) \end{pmatrix}$$

이므로, (5점)

점 $(0, \frac{\pi}{2})$ 에서 함수 f 의 2차 근사다항식은

$$T_2 f(x, y) = 2 + x + \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{\pi^2}{4}\right) x^2 - \left(y - \frac{\pi}{2}\right)^2 \right\}$$

이다. (7점)

2. $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ 이라 하자.

만약 점 (x, y) 가 극점이라면 라그랑즈 승수법에 의해

$$\text{grad } g(X) = \lambda \text{ grad } f(X)$$

를 만족하는 실수 λ 가 존재한다. 즉,

$$(2x, 2y, 2z) = \lambda(1, -2, 2)$$

이다. (2점)

한편 (x, y, z) 는 $g(x, y, z) = 0$ 을 만족하므로

$$\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 + (-\lambda)^2 + \lambda^2 = 1$$

로부터 $\lambda = \pm \frac{2}{3}$ 를 얻을 수 있다. (4점)

$\lambda = \frac{2}{3}$ 이면 $(x, y, z) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \Rightarrow f(x, y, z) = 3$ 이고,

$\lambda = -\frac{2}{3}$ 이면 $(x, y, z) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) \Rightarrow f(x, y, z) = -3$ 이다.

따라서 함수 f 의 최대, 최솟값은 각각 $3, -3$ 이다. (7점)

3. $(r, \theta) = \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ 일 때, $(u, v) = (0, 1)$ 이다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \Big|_{(r, \theta) = (1, \frac{\pi}{2})} &= \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \Big|_{(u, v) = (0, 1)} \frac{\partial(u, v)}{\partial(r, \theta)} \Big|_{(r, \theta) = (1, \frac{\pi}{2})} & (3\text{점}) \\ &= \begin{pmatrix} 2u+v & u \\ 1 & -2v \end{pmatrix} \Big|_{(u, v) = (0, 1)} \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \Big|_{(r, \theta) = (1, \frac{\pi}{2})} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} & (6\text{점}) \end{aligned}$$

이다.

[별해] 직접 대입하여 풀었을 경우 :

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{pmatrix} 2r \cos^2 \theta + 2r \sin \theta \cos \theta & -2r^2 \cos \theta \sin \theta - r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta \\ \cos \theta - 2r \sin^2 \theta & -r \sin \theta - 2r^2 \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix}$$

에 $(r, \theta) = \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ 를 대입하여 원하는 답을 구할 수도 있다.

(이 경우는 부분점수 없음)