

Quiz 2 (10월 11일 금 3, 4 교시)

[2013년 2학기 수학 및 연습 2]
(시간은 20분이고, 20점 만점입니다)

* 답안지에 학번과 이름을 쓰시오. 답안 작성시 풀이과정을 명시하시오.

1. (7점) 다음 함수의 극대점, 극소점과 안장점을 구하시오.

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 3x - 3y + 4$$

2. (7점) 곡면 $z^2 = xy + 4$ 의 점 중에서 원점에 가장 가까운 점을 모두 구하시오.
3. (6점) 함수 $F(x, y, z) = (x + y^3 - 3z, x + y^2 + z^2, -x - y^3 + z^3)$ 에 대하여 $\det F'(1, 1, 1)$ 을 구하시오.

Quiz 2 모범답안 및 채점기준 예시

1. 주어진 함수의 임계점을 구하자. $\text{grad } f(P) = (2x + y + 3, x + 2y - 3)$ 이므로 임계점은 $(-3, 3)$ 이다. (3점)
 $f''(3, -3) > 0$ 이므로 헤세판정법에 의해서 점 $(-3, 3)$ 은 극소점이다.
주어진 함수는 극대점과 안장점은 없다. (7점)

2. 함수 f, g 를 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $g(x, y, z) = z^2 - xy - 4$ 로 두자.
만약 점 (x, y, z) 가 원점으로부터 거리가 최소인 점이라면 라그랑즈 승수법에 의해

$$(2x, 2y, 2z) = \lambda(-y, -x, 2z)$$

인 λ 가 존재한다. (2점)

이로부터 연립방정식 $2x = -\lambda y$, $2y = -\lambda x$, $z = \lambda z$, $z^2 - xy - 4 = 0$ 을 얻는다.

$x = y = z = 0$ 이면 주어진 식을 만족하지 않으므로 $\lambda = 1, 2$ 이고, (4점)

이 연립 방정식을 풀면 $(x, y, z) = (2, -2, 0), (-2, 2, 0), (0, 0, 2), (0, 0, -2)$ 를 얻을 수 있다.

따라서, 구하고자 하는 점은 $(0, 0, 2), (0, 0, -2)$ 이다. (7점)

3. 야코비 행렬의 정의에 의해서

$$F'(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

이다. (3점)

따라서 $\det F'(1, 1, 1) = 0$ 이다. (6점)