

2016년 여름학기 수학 및 연습 2 001 강좌 두 번째 퀴즈

7월 6일(수) 12:30-12:50

- ⊙ 시험시간 = 20분, 총점 = 20점.
- ⊙ 모든 답안에 가능한 자세히 풀이 과정을 적으시오.

1. (5점) 점 $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ 에서 함수 $f(x, y) = \int_1^y \frac{\sin(xt)}{t} dt$ 의 1차 근사다항식을 구하시오.
2. (5점) 함수 $f(x, y) = -3x^3 + x + 3y^3 - y$ 의 모든 극대점, 극소점, 안장점을 구하시오.
3. (5점) $x^8 + y^4 + z^2 = 7$ 일때 xyz 의 최댓값이 존재한다. 그 값을 구하시오.
4. (5점) 함수 $g, h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 는 $\text{grad}g(0, 1) = (3, 4)$ 및 $D_{(a,b)}h(0, 1) = 2a - b$ (a, b 는 임의의 실수) 를 만족하는 미분가능한 함수라고 하자. 다변수 벡터함수 $G(u, v) = (2 \sin v, e^u)$ 와 $F(x, y) = (g(x, y), h(x, y))$ 에 대해 $(F \circ G)'(0, 0)$ 를 구하시오.

Quiz 2 모범답안 및 채점기준 예시

1. $D_1 f(x, y) = \int_1^y \cos(xt) dt = \frac{1}{x} \sin(xy) - \frac{1}{x} \sin x$ 이므로 $D_1 f\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) = 0$, (2점)
 $D_2 f(x, y) = \frac{\sin(xy)}{y}$ 이므로 $D_2 f\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) = 1$ 이다. (4점)
 $f\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) = 0$ 이므로 f 의 $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ 에서의 1차 근사다항식은 $y - 1$ 이다. (5점)

2. $\text{grad} f(x, y) = (-9x^2 + 1, 9y^2 - 1) = (0, 0)$
 \Rightarrow 임계점은 $(\pm 1/3, \pm 1/3), (\pm 1/3, \mp 1/3)$ (복부호 동순). (1점)
 $\Rightarrow f''(x, y) = \begin{pmatrix} -18x & 0 \\ 0 & 18y \end{pmatrix}$ (3점)

$\det f''(\pm 1/3, \pm 1/3) < 0$ 이므로 $(\pm 1/3, \pm 1/3)$ 은 안장점.

$f''(-1/3, 1/3)$ 은 양행렬이므로 $(-1/3, 1/3)$ 은 극소점.

$f''(1/3, -1/3)$ 은 음행렬이므로 $(1/3, -1/3)$ 은 극대점. (5점)

3. 최댓값은 극점에서 생기므로 라그랑주 승수법으로 찾을 수 있다. $g(x, y, z) = x^8 + y^4 + z^2$,
 $f(x, y, z) = xyz$ 라고 두면,

$$\text{grad } g(x, y, z) = (8x^7, 4y^3, 2z), \quad \text{grad } f(x, y, z) = (yz, zx, xy)$$

이고, 라그랑주 승수법에 의하면, 극점에서 $\lambda(8x^7, 4y^3, 2z) = (yz, zx, xy)$ 이다. (2점)

$8\lambda x^8 = 4\lambda y^4 = 2\lambda z^2$ 이므로, $\lambda = 0$ 이면 $xyz = 0$ 이고, $\lambda \neq 0$ 이면 $(x, y, z) = (\pm 1, \pm 2^{\frac{1}{4}}, \pm 2)$, 여덟개의 점이다. 그러므로 최댓값은 $2^{\frac{5}{4}}$ 이다. (5점)

4. 연쇄법칙으로부터

$$F'(G(0, 0))G'(0, 0) = F'(1, 0) \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

을 구하면 된다. (2점)

$$F'(G(0, 0)) = F'(1, 0) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

이므로 (4점), $(F \circ G)'(0, 0) = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ 이 답이 된다. (5점)