

**Quiz 2 (10월 14일 월 7, 8 교시)**

[2013년 2학기 수학 및 연습 2]  
(시간은 20분이고, 20점 만점입니다)

\* 답안지에 학번과 이름을 쓰시오. 답안 작성시 풀이과정을 명시하시오.

1. (7점) 원점에서 함수  $f(x, y) = e^x \cos y$  의 2차 근사다항식을 구하시오.
2. (6점) 함수  $f(x, y) = x + 2y - x^2y^4$  의 임계점을 구하고 극대인지, 극소인지, 안장점인지 판별하시오.
3. (7점) 라그랑주 승수법으로, 타원  $x^2 + 3y^2 = 1$  위에서 함수

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2$$

의 최댓값을 구하시오.

## Quiz 2 모범답안 및 채점기준 예시

1.  $f'(x, y) = (e^x \cos y, -e^x \sin y)$  (2점)

$f''(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ -e^x \sin y & -e^x \cos y \end{pmatrix}$  (5점)

따라서, 원점에서  $f(x, y)$  의 2차 근사다항식은

$$T_2 f(x, y) = 1 + x + \frac{x^2 - y^2}{2} \quad (7점)$$

[별해]  $f(x, y) = e^x \cos y = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \left(1 - \frac{y^2}{2} + o(y^3)\right)$   
 $= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} - \frac{xy^2}{2} - \frac{x^2 y^2}{4}$   
 $+ \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) o(y^3) + \left(1 - \frac{y^2}{2}\right) o(x^2) + o(x^2) o(y^2)$   
 $= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + o(x^2 + y^2)$  이므로 (5점)

근사다항식의 유일성에 의해,  $T_2 f(x, y) = 1 + x + \frac{x^2 - y^2}{2}$ . (7점)

2.  $\text{grad } f(x, y) = (1 - 2xy^4, 2 - 4x^2y^3) = (0, 0)$   
 $\Rightarrow xy^4 = \frac{1}{2} = x^2y^3 \Rightarrow (x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt[5]{2}}, \frac{1}{\sqrt[5]{2}}\right) : \text{임계점.}$  (2점)

$f''(x, y) = \begin{pmatrix} -2y^4 & -8xy^3 \\ -8xy^3 & -12x^2y^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det f''(x, y) = -40x^2y^6$  (5점)

$\Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt[5]{2}}, \frac{1}{\sqrt[5]{2}}\right) : \text{안장점.}$  (6점)

3.  $g(x, y) = x^2 + 3y^2 - 1$  이라 하자.  $(x, y)$  가  $f$  의 극점이라면  
 $\text{grad } f(x, y) = \lambda \text{grad } g(x, y)$  를 만족하는  $\lambda$  가 존재한다.  
 즉,  $(2x + 2y, 2x + 6y) = \lambda(2x, 6y)$  (2점)

$x = 0, y = 0$  이면 주어진 식을 만족하지 않는다.

따라서 위의 연립방정식을 풀면  $\lambda = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$  (4점)

$\lambda = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = (\lambda - 1)x = \frac{1}{\sqrt{3}}x \Rightarrow x = \sqrt{3}y$

$$\Rightarrow g(x, y) = x^2 + 3y^2 = 3y^2 + 3y^2 = 6y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow (x, y) = \left( \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \text{ (복호동순)}$$

$$\text{유사하게, } \lambda = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow (x, y) = \left( \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \mp \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \text{ (복호동순)}$$

$$f\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad f\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \mp \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ 이므로}$$

함수  $f$  의 최댓값은  $1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$  이다. (7점)