

Quiz 2 (10월 16일 금 7,8 교시)

[2015년 2학기 수학 및 연습 2]

(시간은 20분이고, 20점 만점입니다.)

* 답안지에 학번과 이름을 쓰시오. 답안 작성시 풀이과정을 명시하시오.

1. (6점) 함수 $f(x, y) = \int_1^y \frac{1}{t} e^{-xt^2} dt$ 의 $(1, 1)$ 에서의 1차 근사다항식을 구하시오.

2. (7점) 세 번 미분가능한 함수 $f(x, y)$ 의 원점에서의 3차 근사다항식이

$$(x + 2y)^3 - 4xy + y^2$$

이라고 한다. 이 때 원점이 임계점임을 설명하고, 헤세판정법을 이용하여 원점이 극댓점인지 극솟점인지 안장점인지 판정하시오.

3. (7점) 반지름 R 인 원에 내접하는 삼각형 중에서 세 변의 길이의 합이 최대인 경우는 언제인지 라그랑주 승수법을 사용하여 구하시오.

Quiz 2 모범답안 및 채점기준 예시

1. $D_1f = \int_1^y -te^{-xt^2} dt$ 이므로 $D_1f(1,1) = 0$, (2점)
 $D_2f = \frac{1}{y}e^{-xy^2}$ 이므로 $D_2f(1,1) = 1/e$ 이다. (4점)
 $f(1,1) = 0$ 이므로 f 의 $(1,1)$ 에서의 1차 근사다항식은 $\frac{1}{e}(y-1)$ 이다. (6점)

2.

$$\sum_{k=i+j=0}^3 \frac{1}{k!} D_1^i D_2^j f(0,0) = (x+2y)^3 - 4xy + y^2$$

에서 $D_1f(0,0) = D_2f(0,0) = 0$ 이므로 원점은 임계점이다. (2점)

또한 위의 식에서 2차항들을 비교해보면 헤세 행렬 $f''(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ 을 얻는다. (5점)

이 행렬의 행렬식이 음수이므로 f 는 원점에서 안장점이다. (7점)

3. 반지름이 R 인 원에 내접하는 삼각형의 세 각의 크기를 각각 x, y, z 라 놓으면 $g := x + y + z = \pi$ 이다. 삼각형의 세 변의 길이는 각각 $2R \sin x, 2R \sin y, 2R \sin z$ 이므로, $f = 2R(\sin x + \sin y + \sin z)$ 라 두자. 집합 $\{(x, y, z) \mid g(x, y, z) = \pi\}$ 의 점 (x, y, z) 에서 f 가 최대라면, 라그랑주 승수법에 의해 $2R(\cos x, \cos y, \cos z) = \lambda(1, 1, 1)$ 를 만족해야 한다. (3점)

$\cos x = \cos y = \cos z$ 이고 $0 < x, y, z < \pi$ 이므로 $x = y = z$ 를 얻는다. 따라서 세 변의 길이의 합이 최대인 경우는 정삼각형이다. (4점) (라그랑주 승수법을 사용하지 않은 경우는 0점)(답안을 채점할 때, 최대, 최소값의 존재에 관한 (직관적) 설명 또는 (최대최소정리에 근거한) 논증이 없으면 1점을 감점)