

Quiz 2 (10월 14일)

[고급수학 및 연습 2 (003강좌) - 2016학년도 2학기]

(제한시간: 20분, 만점: 10점)

★ 답안지에 학번과 이름을 쓰시오. 답안 작성 시 풀이과정을 명시하시오.

1. $\int_1^{1.01} \frac{\cos(0.99t\pi)}{t} dt$ 의 1차 근삿값을 구하고, 오차가 10^{-3} 이하임을 보이시오. (3점)

(풀이) $f(x, y) = \int_1^y \frac{\cos(xt\pi)}{t} dt$ 라 두자.

이때, $\vec{P} = (1, 1)$, $\vec{v} = (-0.01, 0.01)$ 에서의 $T_1 f(\vec{P}, \vec{v})$ 를 구하자.

$$\begin{aligned} D_1 f(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \int_1^y \frac{\cos(xt\pi)}{t} dt \\ &= \int_1^y \frac{\partial}{\partial x} \frac{\cos(xt\pi)}{t} dt = - \int_1^y \pi \sin(xt\pi) dt \\ D_2 f(x, y) &= \frac{\cos(xy\pi)}{y} \quad \text{이므로} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_1 f(\vec{P}, \vec{v}) &= f(\vec{P}) + D_{\vec{v}} f(\vec{P}) \\ &= f(1, 1) + (D_1 f(1, 1), D_2 f(1, 1)) \cdot (-0.01, 0.01) \\ &= 0 + (0, -1) \cdot (-0.01, 0.01) \\ &= -0.01 \quad \text{(2점)} \end{aligned}$$

이제, 오차를 구해보자.

$$\begin{aligned} D_1^2 f(x, y) &= - \frac{\partial}{\partial x} \int_1^y \pi \sin(xt\pi) dt \\ &= - \int_1^y \pi \frac{\partial}{\partial x} \sin(xt\pi) dt = - \int_1^y \pi^2 t \cos(xt\pi) dt \\ D_1 D_2 f(x, y) &= -\pi \sin(xy\pi) \\ D_2^2 f(x, y) &= \frac{-xy\pi \sin(xy\pi) - \cos(xy\pi)}{y^2} \quad \text{이므로} \end{aligned}$$

$x \in [0.99, 1], y \in [1, 1.01]$ 에서

$$\begin{aligned} |D_1^2 f(x, y)| &\leq \int_1^{1.01} \pi^2 t dt = \frac{\pi^2 [1.01^2 - 1]}{2} \leq 5 \\ |D_1 D_2 f(x, y)| &\leq \pi \\ |D_2^2 f(x, y)| &\leq (1.01)\pi + 1 \leq 5 \end{aligned}$$

$$|R_1 f(\vec{P}, \vec{v})| = \frac{M_2}{2}(|v_1| + |v_2|)^2 = 2M_2 \cdot 10^{-3} \text{ 이고}$$

$$M_2 = \max\{|D_i D_j f(\vec{P} + t\vec{v})| : 1 \leq i, j \leq 2, 0 \leq t \leq 1\} \leq 5 \text{ 이므로}$$

$$|R_1 f(\vec{P}, \vec{v})| \leq 10^{-3} \text{이 된다. (1점)}$$

(채점기준)

- 함수 $f(x, y)$ 를 다르게 잡아도, 과정 맞고, 오차 10^{-3} 이내로 구하면 인정.
- 오차를 $D_v^2 f(\vec{P} + t\vec{v})$, $t \in [0, 1]$ 으로 구해야 하는데, $D_v^2 f(\vec{P})$ 으로 구한 경우 부분점수 없음.

2. 함수 $f(x, y) = x^3 + 2y^2 - 4xy + 5x - 4y + 7$ 의 임계점을 구하고, 각각의 임계점을 극대점, 극소점과 안장점으로 분류하시오.(3점)

(풀이) 임계점은 $\text{grad} f(x, y) = 0$ 일 때를 풀면 된다.

$$D_1 f(x, y) = 3x^2 - 4y + 5, D_2 f(x, y) = 4y - 4x - 4 \text{ 이므로}$$

$$\text{임계점은 } (x, y) = (1, 2), \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right) \text{ 이 된다. (1점)}$$

$$(x, y) = (1, 1) \text{인 경우}$$

$$D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \text{ 이므로}$$

$$\det D^2 f(1, 1) = 6 \cdot 4 - (-4) \cdot (-4) = 8 > 0$$

$$D_1^2 f(1, 1) = 6 > 0$$

$$\text{즉, } D^2 f(1, 1) > 0 \text{이므로 } (x, y) = (1, 1) \text{은 극소점. (1점)}$$

$$(x, y) = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right) \text{인 경우}$$

$$\det D^2 f(1, 1) = 2 \cdot 4 - (-4) \cdot (-4) = -8 < 0$$

$$\text{이므로 } (x, y) = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right) \text{은 안장점. (1점)}$$

(채점기준)

- 임계점 두개 중 하나만 잘못 구해도 부분점수 없음.

3. 반지름 R 인 원에 내접하는 삼각형 중에서 넓이가 최대인 경우는 언제인지 라그랑주 승수법을 사용하여 구하시오. (4점)

(풀이) 내접하는 삼각형을 $\triangle ABC$ 라 하자. 그러면,

$$a := \overline{BC} = 2R \sin A \quad \text{사인공식}$$

$$b := \overline{CA} = 2R \sin B$$

삼각형의 넓이 $= \frac{1}{2}ab \sin C = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$ 이므로

$$f(A, B, C) = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$$

$$g(A, B, C) = A + B + C - \pi$$

라 두고, $g(A, B, C) = 0$ 일 때, $f(A, B, C)$ 의 최댓값을 라그랑주 승수법을 사용하여 구해보자.

임계점 (A, B, C) 에서 $\text{grad}g(A, B, C) = (1, 1, 1) \neq (0, 0, 0)$ 이므로

$$\begin{aligned} \text{grad}f(A, B, C) &= 2R^2(\cos A \sin B \sin C, \sin A \cos B \sin C, \sin A \sin B \cos C) \\ &= \lambda(1, 1, 1) \end{aligned}$$

을 만족하는 λ 가 존재한다.

즉, $\cos A \sin B \sin C = \sin A \cos B \sin C = \sin A \sin B \cos C$ 이다.

$\sin A, \sin B, \sin C = 0$ 인 경우는 $\triangle ABC$ 가 삼각형이 되지

않으므로 제외하면, $\tan A = \tan B = \tan C$ 가 성립한다.

이 조건을 만족하는 A, B 는

$$A = B + n\pi \quad (n \text{은 정수})$$

이므로 $(A, B, C) = (A, A + n\pi, A + m\pi)$ 가 될것이다. 이때,

$A + B + C = \pi$ 를 고려하면,

$$(A, B, C) = \left(\frac{(1-n-m)\pi}{3}, \frac{(1+2n-m)\pi}{3}, \frac{(1-n+2m)\pi}{3} \right)$$

이 된다. 즉, $\sin A, \sin B, \sin C \in \{0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\}$ 이므로

$f(A, B, C)$ 의 최댓값은, $2R^2(\frac{\sqrt{3}}{2})^3$ 이고 삼각형 조건을 만족하는

A, B, C 는 $A = B = C = \frac{\pi}{3}$, 정삼각형 이다.

(채점기준)

- f, g 를 상황에 맞게 잘 잡은 경우 (2점)
- 라그랑주 승수법을 적용하여 결론 도출 (2점)
(라그랑주 승수법을 적용하였으나, 더 이상 유도를 못하고, 결론만 도출한 경우 (1점))