

Quiz 1 (10월 16일 수 7,8 교시)

[2013년 2학기 수학 및 연습 2]

(시간은 20분이고, 20점 만점입니다.)

\* 답안지에 학번과 이름을 쓰시오. 답안 작성시 풀이과정을 명시하시오.

1. (7점) 다음 함수의 극대점, 극소점과 안장점을 구하시오.

(a) (4점)  $f(x, y) = x^3 + y^2 - 6xy + 6x + 3y$

(b) (3점)  $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$

2. (7점) 평면  $x + y + z = 1$  에서 함수  $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$  의 최소값은 존재한다. 라그랑즈 승수법을 이용하여 이 최소값을 구하시오.

3. (6점) 다음에 주어진 함수들의 야코비 행렬식값을 구하여라.

$$G_1(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$$

$$G_2(\rho, \varphi, \theta) = (\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi)$$

$$G_3(u, v, w) = (u + \sin v + \cos w, 2v + e^w, 3w)$$

정답

1. (a)  $D_1f = 3x^2 - 6y + 6$ ,  $D_2f = 2y - 6x + 3$  에서  
임계점은  $(1, \frac{3}{2}), (5, \frac{27}{2})$ . (1점)

헤세 행렬은

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$

(2점)

헤세 판정법에 의해

$$\det f''(1, \frac{3}{2}) < 0 \Rightarrow (1, \frac{3}{2}) \text{ 는 안장점.} \quad (3\text{점})$$

$$\det f''(5, \frac{27}{2}) > 0 \Rightarrow (5, \frac{27}{2}) \text{ 는 극소점.} \quad (4\text{점})$$

- (b)  $D_1f = 3x^2 - 3y^2$ ,  $D_2f = -6xy$  에서  
임계점은  $(0, 0)$ . (1점)

$(x, y)$  가  $x$  가 0 보다 작은 쪽에서  $x$ -축을 따라  $(0, 0)$  에 접근할 때  
와 0 보다 큰 쪽에서  $x$ -축을 따라  $(0, 0)$  에 접근 할 때  $f(x, y)$  의  
부호가 다르므로 점  $(0, 0)$  은 안장점. (3점)

2.  $g(x, y, z) = x + y + x - 1$  이라 하면, Lagrange 승수법에 의해

$$\text{grad } f(x, y, z) = \lambda \text{grad } g(x, y, z)$$

을 만족하는 실수  $\lambda$  가 존재한다.

$$\text{즉, } (x, 2y, 3z) = \lambda(1, 1, 1) \text{ 이다.} \quad (2\text{점})$$

위의 연립방정식을 풀면

$$x = \lambda, y = \frac{1}{2}\lambda, z = \frac{1}{3}\lambda$$

이고

$$\lambda + \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{3}\lambda = 1$$

에서  $\lambda = \frac{6}{11}$  이다. (4점)

따라서 구하려는 최소값은  $\frac{6}{11}$  이다. (7점)

3.

$$\det G_1' = r, \quad \det G_2' = \rho^2 \sin \varphi, \quad \det G_3' = 6$$

(각 2점씩)