

Quiz 2 (10월 11일 금 5, 6 교시)

[2013년 2학기 수학 및 연습 2]
(시간은 20분이고, 20점 만점입니다.)

* 답안지에 학번과 이름을 쓰시오. 답안 작성시 풀이과정을 명시하시오.

1. 평면에서 정의된 이급 함수 $f(x, y)$ 와 정의역의 원소 P 에 대해

$$f''(P) = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

이라고 한다. 다음 물음에 답하시오.

- (a) (3점) $\mathbf{v} = (a, b)$ 에 대해 $D_{\mathbf{v}}^2 f(P)$ 를 a, b 에 대한 식으로 나타내시오.
- (b) (7점) \mathbf{v} 가 단위벡터일 때, 라그랑즈 승수법을 써서 $D_{\mathbf{v}}^2 f(P)$ 의 최댓값과 최솟값을 구하시오.
2. 원점 $O(0, 0)$ 가 아닌 평면 위의 점 $P(x, y)$ 에 대해 점 O 와 P 를 지나는 반직선 위에 있는 점 $P'(x', y')$ 은 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP'} = 1$ 을 만족한다고 한다. $F(x, y) = (x', y')$ 으로 정의되는 함수 F 에 대해 다음 물음에 답하시오.
- (a) (4점) (x', y') 을 (x, y) 에 대한 식으로 나타내시오.
- (b) (6점) $\det F'(x, y)$ 를 구하시오.

Quiz 2 모범답안 및 채점기준 예시

1. (a) $D_{\mathbf{v}}^2 f(a, b) = a^2 D_1^2 f + 2ab D_1 D_2 + b^2 D_2^2 f$ (1점)

따라서, $D_{\mathbf{v}}^2(a, b) = 5a^2 - 4ab + 2b^2$ 이다. (3점)

(b) $g(a, b) = a^2 + b^2$, $h(a, b) = D_{\mathbf{v}}^2(a, b)$ 라고 하자.

만약 점 (a, b) 가 극점이라면 라그랑주 승수법에 의해

$$\text{grad } h(a, b) = 2\lambda \text{ grad } g(a, b)$$

인 λ 가 존재, 즉 $(5a - 2b, -2a + 2b) = \lambda(a, b)$ 이다. (2점)

$a = b = 0$ 이면 주어진 식을 만족하지 않으므로 $\lambda = 1, 6$ 이다.

(4점)

$\lambda = 1$ 일 때, $(a, b) = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$ 이고

$\lambda = 6$ 일 때, $(a, b) = \pm \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right)$ 이다.

따라서 함수 h 의 최댓값은 6 이고, 최솟값은 1 이다. (7점)

2. (a) $(x', y') = t(x, y)$ 인 양수 t 를 생각하면 문제의 조건에 의해

$t(x^2 + y^2) = 1$ 을 만족해야 한다. 따라서

$$x' = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad y' = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

이다.

(4점)

(b) 함수 F 의 야코비 행렬을 구하면

$$F'(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} & \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} & \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{pmatrix}$$

이고,

(3점)

이 때 행렬식은 $-\frac{1}{(x^2 + y^2)^2}$ 이다.

(6점)