

## Advanced Calculus 2 003, Quiz1 모범답안 및 채점기준

### Problem1.

좌표평면에서 정의된 함수  $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$  에 대해 다음 물음에 답하시오.

(a)  $f(x,y)$  는 연속함수임을 보이라. (2점)

(b)  $f(x,y)$  는 원점에서 미분가능한 함수인가? (2점)

### Solution.

(a)

(i)  $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - (0,0)$

$xy(x^2-y^2), x^2+y^2$  가 연속함수,  $x^2+y^2 \neq 0$  이므로  $f(x,y)$  는 연속이다.

(ii)  $(x,y) = (0,0)$

$$\begin{aligned} |f(x,y) - f(0,0)| &= \left| \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \right| \leq \left| \frac{1}{2} \frac{(x^2+y^2)(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \right| \quad (\text{산술기하 부등식}) \\ &\leq \frac{1}{2}(x^2+y^2) \end{aligned}$$

이므로  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |f(x,y) - f(0,0)| \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{2}(x^2+y^2) = 0$  이 되어

$f(x,y)$  는 원점에서 연속이다.

(b)

$\text{grad} f(0,0) = (0,0)$  이므로,

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(x,y) - f(0,0) - \text{grad} f(0,0) \cdot (x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|xy(x^2-y^2)|}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \\ &\leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2+y^2)}{2\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \end{aligned}$$

이 되므로 미분가능하다.

### 채점기준

→(a)에서 원점이 아닐 때를 고려하지 않으면 0.5점 감점

→(a),(b)에서 산술기하부등식을 사용할 때,  $xy \neq 0$  을 가정하고  $\frac{1}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2|xy|}$  을 사용하

면 각 0.5점 감점

→ (b)에서 미분가능성의 정의를 틀리게 사용하면 부분점수 없음

(“원점에서 연속이고 모든 방향미분계수가 0이므로 미분가능하다” 혹은

“방향벡터  $v$  에 대해,  $\text{grad}f(0,0) \cdot v = D_v(0,0)$  를 만족하므로 미분가능하다”

등의 논의로 원점에서의 미분가능성을 기술한 답안은 틀린 논리이므로 0점입니다.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y(\sqrt{x^2+y^2})}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \text{이와 같은 함수는 원점에서 연속이고, 모든 방향}$$

미분계수가 0이고, 물론  $\text{grad}f(0,0) \cdot v = D_v(0,0)$  도 만족하지만 미분가능하지 않습니다.)

→ (b)에서 부등식을 사용하는 과정에서 사소한 실수로 미분가능성을 보이지 못하였으나 옳은 정의를 정확히 서술한 경우 부분점수 1점

## Problem2.

함수  $f(x,y,z) = x^3 - 2y^2 + z^2$  과 곡면  $f(x,y,z) = 0$  위의 점  $P = (1,1,1)$  에 대해 다음 물음에 답하시오.

(a) 점  $P$  에서 함수  $f$  가 가장 빨리 증가하는 방향의 단위벡터를 구하시오. (2점)

(b) 점  $P$  에서 곡면  $f(x,y,z) = 0$  에 접하는 평면의 방정식을 구하시오. (2점)

## Solution.

(a) 점  $P$  에서 함수가 가장 빨리 증가하는 방향은  $\text{grad}f(P)$  의 방향이다.

$\text{grad}f(x,y,z) = (3x^2, -4y, 2z)$  이므로  $\text{grad}f(P) = (3, -4, 2)$  이므로 이 방향의 단위벡터는  $\frac{1}{\sqrt{29}}(3, -4, 2)$  이다.

(b) 곡면  $f(x,y,z) = 0$  에 점  $P$ 에서의 접평면의 법선벡터는  $\text{grad}f(P) = (3, -4, 2)$  이다  
그러므로 접평면의 방정식은  $3x - 4y + 2z = 1$  이다.

## 채점기준

(a),(b) 사소한 계산실수 시 1점 감점

### Problem3.

$n$ -공간에서 점  $P$  가 집합  $U$  의 경계점이면,  $\lim_{i \rightarrow \infty} X_i = P$  인 수열 ( $X_i \in U \mid i = 1, 2, 3, \dots$ ) 이 존재함을 설명하라. (2점)

### Solution.

$P$  를 중심으로 하고 반지름의 길이가  $1/i$  인 구를  $B(P, \frac{1}{i})$  라 하자.

이 때  $P$  가 집합  $U$  의 경계점이기 때문에,  $B(P, \frac{1}{i})$  에는  $U$  의 내점의 원소가 적어도 하나 포함된다.

$B(P, \frac{1}{i})$  안에 포함되는  $U$  의 내점의 원소중 하나를 골라  $X_i$  라고 하자.

모든  $i$  에 대해  $X_i$  가 내점에 원소임은 수열을 잡는 과정에서 자명하고,

$\lim_{i \rightarrow \infty} |X_i - P| \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{i} = 0$  이 되므로  $\lim_{i \rightarrow \infty} X_i = P$  이다.

### 채점기준

→ 경계점의 정의를 정확히 알고 사용한 경우 최소 1점

→ 점  $P$  가 경계점임을 사용하지 않은 모든 풀이는 0점

(e.g. 집합  $U$  의 내점중 아무 점을 잡고, 그 점과  $P$  를 이은 선분 안에서  $X_i$  를 잡는 풀이 ; 이러한 방법으로  $X_i$  를 잡는 경우,  $\lim_{i \rightarrow \infty} X_i = P$  가 되게 할 수는 있으나 집합  $U$  가 볼록집합이라는 가정이 없기 때문에, 모든  $i$  에 대해  $X_i$  가 내점에 원소라고 할수 없습니다.)