

Quiz 1 (10월 2일 금 5, 6 교시)

[2015년 2학기 수학 및 연습 2]

(시간은 20분이고, 20점 만점입니다.)

* 답안지에 학번과 이름을 쓰시오. 답안 작성시 풀이과정을 명시하시오.

1. (7점) 좌표평면 \mathbb{R}^2 에서 정의된 함수

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{\sqrt{x^4 + x^2y^2 + y^4}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오.

- (a) (4점) 원점에서 함수 $f(x, y)$ 의 연속성을 판정하시오.
- (b) (3점) $\mathbf{v} = (1, \sqrt{2})$ 에 대한 원점에서의 방향미분 $D_{\mathbf{v}}f(0, 0)$ 을 구하시오.
2. (6점) $f(x, y) = x^3 - x + y^2 + 1$ 이고, $x = e^r \cos \theta$, $y = e^r \sin \theta$ 일 때, $(r, \theta) = \left(\frac{1}{2} \log 2, \frac{\pi}{4}\right)$ 에서 f 의 편미분계수 $\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial \theta}$ 를 구하시오.
3. (7점) 곡면 $x^3 - x - y^2 - z^2 + 1 = 0$ 위의 점 $P\left(-1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 에서 접평면의 방정식을 구하시오.

Quiz 1 모범답안 및 채점기준 예시

1. (a) $|xy^2| = \sqrt{x^2y^2}|y| \leq \sqrt{x^4 + x^2y^2 + y^4}|y|$ 이므로

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{xy^2}{\sqrt{x^4 + x^2y^2 + y^4}} - 0 \right| \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |y| = 0$$

이다. (3점)

따라서 f 는 원점에서 연속이다. (4점)

(b) $D_{\mathbf{v}}f(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t\mathbf{v})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t^3}{\sqrt{7}t^2 \cdot t} = \frac{2}{\sqrt{7}}.$ (3점)

2. 연쇄법칙에 의해 $\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y},$ (2점)

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = -y \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y} \text{ 이다. (4점)}$$

$(r, \theta) = (\frac{1}{2} \log 2, \frac{\pi}{4})$ 일 때 $(x, y) = (1, 1)$ 이므로,

$$\frac{\partial f}{\partial r} = 4, \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0$$

이다. (6점)

3. $f(x, y, z) = x^3 - x - y^2 - z^2 + 1$ 라 두자. $\text{grad} f = (3x^2 - 1, -2y, -2z)$

이므로, $\text{grad} f(P) = (2, -\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ 이다. (4점)

점 P 에서 등위면과 기울기벡터는 서로 수직이므로 이 기울기벡터는 접평면에 수직인 법벡터가 된다. 따라서, 접평면의 방정식은

$$\text{grad} f(P) \cdot (X - P) = 0$$

이고, 값을 대입하여 정리하면

$$2x - \sqrt{2}y - \sqrt{2}z + 4 = 0$$

이다. (7점)