

Quiz 1 (9월 30일 월 7, 8 교시)

[2013년 2학기 수학 및 연습 2]
(시간은 20분이고, 20점 만점입니다.)

* 답안지에 학번과 이름을 쓰시오. 답안 작성시 풀이과정을 명시하시오.

1. (10점) 좌표평면 \mathbb{R}^2 에서 정의된 함수

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{\sqrt{x^4 + y^4}} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오.

- (a) (5점) 원점에서 함수 $f(x, y)$ 의 연속성을 판정하시오.
- (b) (5점) $\mathbf{v} = (1, 1)$ 에 대한 원점에서의 방향미분 $D_{\mathbf{v}}f(0, 0)$ 을 구하시오.
2. (5점) $f(u, v) = u \log v + e^{uv}$, $u = x \sin y$, $v = y \cos x$ 일 때, $(x, y) = (0, 1)$ 에서 f 의 x 방향과 y 방향에 대한 미분계수를 구하시오.
3. (5점) 곡면 $z = \cos(x^2 + y^2)$ 위의 점 $P(\sqrt{\frac{\pi}{6}}, \sqrt{\frac{\pi}{6}}, \frac{1}{2})$ 에서 접평면의 방정식을 구하시오.

Quiz 1 모범답안 및 채점기준 예시

1. (a) 함수 $f(x, y)$ 가 원점에서 연속이라면

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |f(x, y)| = |f(0, 0)|$$

이어야 한다. (2점)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |f(x, y)| \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|y|\sqrt{x^4 + y^4}}{\sqrt{x^4 + y^4}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |y| = 0$$

$$(\because |xy^2| = |y|\sqrt{x^2y^2} \leq |y|\sqrt{x^4 + y^4})$$

이므로 $f(x, y)$ 는 원점에서 연속이다. (5점)

* 다른 부등식을 써도 점수를 줄 것. 하지만, $|f(x, y)| \leq \frac{|xy^2|}{\sqrt{2}|xy|}$ 과 같은 부등식은 $x \neq 0, y \neq 0$ 일 때만 적용되는 것이므로, 감점할 것.

$$(b) D_{\mathbf{v}}f(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t\mathbf{v})}{t} \quad (2점)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3}{\sqrt{2}t^2 \cdot t} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (5점)$$

2. $(x, y) = (0, 1)$ 일 때 $(u, v) = (0, 1)$ 이다.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= (\log v + ve^{uv}) \sin y + \left(\frac{u}{v} + ue^{uv}\right)(-y \sin x) = \sin 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$= (\log v + ve^{uv})x \cos y + \left(\frac{u}{v} + ue^{uv}\right) \cos x = 0$$

(x 방향, y 방향 미분 계수 중 하나만 맞으면 (3점), 모두 맞으면 (5점))

3. $f(x, y, z) = z - \cos(x^2 + y^2)$ 이라 놓으면 주어진 곡면은 f 의 0- 등위면이다.

$$\text{grad} f = (2x \sin(x^2 + y^2), 2y \sin(x^2 + y^2), 1) \quad (2\text{점})$$

$$\text{grad} f(P) = \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}, 1\right) \quad (3\text{점})$$

점 P 에서 등위면과 기울기벡터는 서로 수직이므로 이 기울기벡터는 접평면에 수직인 법벡터가 된다. 따라서, 접평면의 방정식은

$\text{grad} f(P) \cdot (X - P) = 0$ 이고, 값을 대입하면

$$\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}, 1\right) \cdot \left(x - \sqrt{\frac{\pi}{6}}, y - \sqrt{\frac{\pi}{6}}, z - \frac{1}{2}\right) = 0 \text{이 된다.} \quad (5\text{점})$$