

Quiz 1 (9월 25일 수 7, 8 교시)

[2013년 2학기 수학 및 연습 2]

(시간은 20분이고, 20점 만점입니다.)

* 답안지에 학번과 이름을 쓰시오. 답안 작성시 풀이과정을 명시하시오.

1. (10점) $(x, y) \neq (0, 0)$ 일 때, 좌표평면에서 정의된 함수

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

에 대하여 다음 물음에 답하여라.

- (a) (5점) f 가 원점에서 연속이도록 $f(0, 0)$ 을 정하고, 이유를 밝혀라.
- (b) (5점) (a) 에서처럼 $f(0, 0)$ 을 정했을 때, 벡터 $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \neq (0, 0)$ 에 대하여 \mathbf{v} -방향 미분계수 $D_{\mathbf{v}}f(0, 0)$ 가 존재할 조건을 구하여라.
2. (5점) 함수 $f(x, y) = 2x^2 + xy$ 의 그래프 위의 점 $(2, -1, 6)$ 에서 그래프에 대한 접평면의 식을 구하여라.
3. (5점) $\frac{\partial f}{\partial x}(2, 3) = 4$ 이고 $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 3) = -3$ 인 미분가능한 함수 $f(x, y)$ 가 있다. $P = (2, 3)$ 근방에서 가장 빨리 함수값이 증가하는 방향의 단위벡터 \mathbf{v} 를 구하고, $D_{\mathbf{v}}f(P)$ 를 구하여라.

모범 답안

1. (a) $(x, y) = (0, 0)$ 에서 연속이려면

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |f(x, y)| = |f(0, 0)|$$

이어야 한다. (2점)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |f(x, y)| \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{2} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2} = 0$$

이므로 $f(0, 0) = 0$ 이어야 한다. (5점)

* 다른 부등식을 써도 점수를 줄 것. 하지만, $|f(x, y)| \leq \frac{xy}{\sqrt{x^2}}$ 과 같은 부등식은 $x \neq 0$ 일 때만 적용되는 것이므로, 감점할 것.

- (b) $t \neq 0$ 이면

$$f(t\mathbf{v}) = \frac{t^2 v_1 v_2}{|t| \sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = |t| \frac{v_1 v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

이다. (3점)

$$D_{\mathbf{v}} f(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t|}{t} \frac{v_1 v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

위의 극한이 존재하려면 $v_1 v_2 = 0$ 인 경우밖에 없다.

따라서 $D_{\mathbf{v}} f(0, 0)$ 이 존재할 조건은 $v_1 v_2 = 0$ 이다. (5점)

2. $f(x, y) = 2x^2 + xy$ 의 그래프는 $g(x, y, z) = 2x^2 + xy - z$ 의 0-등위면이다.

$$\text{grad } g(x, y, z) = (4x + y, x, -1). \quad (2\text{점})$$

따라서 점 $(2, -1, 6)$ 에서 이 등위면에 수직인 벡터는

$$\text{grad } g(2, -1, 6) = (7, 2, -1) \text{ 이다.} \quad (3\text{점})$$

원하는 접평면의 식은 $7(x - 2) + 2(y + 1) - (z - 6) = 0$ 이다. (5점)

3. $\mathbf{v} = \frac{1}{5}(4, -3)$ 방향으로 가장 빨리 증가한다. (2점)

$$D_{\mathbf{v}} f(P) = \text{grad } f(P) \cdot \mathbf{v} = 5 \text{ 이다.} \quad (5\text{점})$$