

Quiz 1 (9월 27일 금 7, 8 교시)

[2013년 2학기 수학 및 연습 2]

(시간은 20분이고, 20점 만점입니다.)

* 답안지에 학번과 이름을 쓰시오. 답안 작성시 풀이과정을 명시하시오.

1. (5점) \mathbb{R}^3 에서 정의된 함수 f 가 다음과 같이 주어져 있다.

$$f(x, y, z) = x^2 + y^3 + xyz.$$

이때, 벡터 $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$ 에 대하여 \mathbf{v} -방향미분계수

$$D_{\mathbf{v}}f(1, 1, 1)$$

의 값을 구하여라.

2. (5점) 평면에서 정의된 함수

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

가 원점에서 연속임을 보여라.

3. (5점) 평면에서 정의된 함수 f 를 직교좌표계 (x, y) 를 써서 나타낼 때에는 $f(x, y)$ 로 쓰고, 극좌표계 (r, θ) 를 써서 나타낼 때에는 $f(r, \theta)$ 로 쓰기로 할 때, 아래의 등식에서 실수 a, b, c, d 를 결정하라.

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \theta} \right|_{(r, \theta) = (1, \pi/3)} = a \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x, y) = (c, d)} + b \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x, y) = (c, d)}$$

4. (5점) 다음 식으로 주어진 곡면위의 점 $(1, 7, 2)$ 에서 접평면의 방정식을 구하여라.

$$2y - z^3 - 3xz = 0$$

Quiz 1 모범답안 및 채점기준 예시

1. $\text{grad}f(x, y, z) = (2x + yz, 3y^2 + xz, xy)$ (2점)

$\therefore D_{\mathbf{v}}f(1, 1, 1) = \text{grad}f(1, 1, 1) \cdot \mathbf{v}$ (3점)

$= (3, 4, 1) \cdot (1, 2, 3) = 14$ (5점)

2.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |f(x, y) - f(0, 0)| = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{y^3}{x^2 + y^2} \right|$$
 (2점)

$|y^3| \leq |y|(x^2 + y^2)$ 이므로

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{y^3}{x^2 + y^2} \right| \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |y| = 0$$

이므로 f 는 원점에서 연속이다. (5점)

* 다른 부등식을 써도 점수를 줄 것. 하지만, $|f(x, y)| \leq \left| \frac{y^3}{y^2} \right|$ 과 같은 부등식은 $y \neq 0$ 일 때만 적용되는 것이므로, 감점할 것.

3. $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$

$$(r, \theta) = (1, \frac{\pi}{3}) \implies (x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$$

연쇄법칙으로 부터 $\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta}$ (1점)

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}(-r \sin \theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta)$$

$$a = -\frac{\sqrt{3}}{2}, b = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{2}, d = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
 (5점, 각 1점씩)

4. 주어진 곡면은 함수 $f(x, y, z) = 2y - z^3 - 3xz$ 의 0-등위면이다.

$\text{grad}f(x, y, z) = (-3z, 2, -3z^2 - 3x)$ (2점)

따라서 점 $(1, 7, 2)$ 에서 이 등위면에 수직인 벡터는

$\text{grad}f(1, 7, 2) = (-6, 2, -15)$ 이다.

(3점)

따라서 점 $(1, 7, 2)$ 에서의 접평면은

$$-6(x - 1) + 2(y - 7) - 15(z - 2) = 0$$

(5점)