

Quiz 1 (9월 27일 금 5, 6 교시)

[2013년 2학기 수학 및 연습 2]
(시간은 20분이고, 20점 만점입니다.)

* 답안지에 학번과 이름을 쓰시오. 답안 작성시 풀이과정을 명시하시오.

1. (10점) 평면에서 정의된 함수

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오.

- (a) (5점) 함수 f 의 연속성을 판정하시오.
- (b) (5점) $D_1 f(0, 0)$ 과 $D_2 f(0, 0)$ 를 구하고, 이를 이용하여 함수 f 의 원점에서 미분가능성을 판단하시오.
2. (5점) 곡면 $z = \frac{8}{9} - xy + 3y^2$ 위의 점 P 에서 접평면이 직선 $x - 1 = \frac{y - 3}{2} = \frac{z - 5}{3}$ 과 수직이다. 이 때, 점 P 를 구하고, 점 P 에서의 접평면의 방정식을 구하여라.
3. (5점) 함수 $f(x, y) = 50 + ax^2 - by^2$ 는 $f(1, -2) = 33$ 이고, $(1, -2)$ 에서 함수값이 가장 빨리 증가하는 방향은 $(-2, 16)$ 과 평행하다. 이 때, a, b 를 구하여라.

Quiz 1 모범답안 및 채점기준 예시

1. (a) 함수 f 가 $(x, y) \neq (0, 0)$ 에서 연속인 것은 자명하다.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |f(x, y) - f(0, 0)| = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{x^3 y}{x^4 + y^2} \right| \quad (2\text{점})$$

$$|x^3 y| \leq |x|(x^4 + y^2) \text{ 이므로}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{x^3 y}{x^4 + y^2} \right| \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |x| = 0$$

이므로 f 는 모든 점에서 연속이다. (5점)

* 다른 부등식을 써도 점수를 줄 것. 하지만, $|f(x, y)| \leq \left| \frac{x^3 y}{2x^2 y} \right|$ 과 같은 부등식은 $x \neq 0, y \neq 0$ 일 때만 적용되는 것이므로, 감점할 것.

$$(b) D_1 f(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + t(1, 0)) - f(0, 0)}{t} = 0. \quad (1\text{점})$$

$$D_2 f(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + t(0, 1)) - f(0, 0)}{t} = 0. \quad (2\text{점})$$

이다.

한편, $\mathbf{v} = (a, b) \neq (0, 0)$ 에 대하여 미분의 정의를 이용하면

$$\lim_{|\mathbf{v}| \rightarrow 0} \left| \frac{f(\mathbf{v}) - f(0, 0) - \text{grad} f(0, 0) \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \right| = \lim_{(a,b) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{a^3 b}{(a^4 + b^2) \sqrt{(a^2 + b^2)}} \right|$$

이고 $b = ma^2$ 따라 (a, b) 가 $(0, 0)$ 으로 접근 하면

$$\lim_{(a,b) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{a^3 b}{(a^4 + b^2) \sqrt{(a^2 + b^2)}} \right| = \frac{m}{(m^2 + 1)}$$

.

m 의 값에 따라 극한 값이 달라지므로 미분가능하지 않다. (5점)

2. $f(x, y, z) = z - \frac{8}{9} + xy - 3y^2$ 라고 하면, f 의 0-등위면의 점 P 에서 $\text{grad} f(P)$ 와 $(1, 2, 3)$ 은 평행하다.

$$(y, x - 6y, 1) = t(1, 2, 3)$$

을 만족하는 t 를 찾으면, $t = \frac{1}{3}$ 이고 $x = \frac{8}{3}, y = \frac{1}{3}, z = \frac{1}{3}$.
 즉, $P = (\frac{8}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ 이다. (3점)

접평면의 방정식은

$$(x - \frac{8}{3}) + 2(y - \frac{1}{3}) + 3(z - \frac{1}{3}) = 0$$

이다. (5점)

3. $\text{grad} f(x, y) = (2ax, -2by)$.

함수가 가장 빨리 증가하는 방향은 $(-2, 16)$ 과 평행하므로

$$\text{grad} f(1, -2) = (2a, 4b) // (-2, 16) \text{ 에서 } b = -4a. \quad (2\text{점})$$

$$f(1, -2) = 50 + a - 4b = 33. \quad (4\text{점})$$

$$\therefore a = -1, b = 4. \quad (5\text{점})$$