

Quiz 1, 2 (10월 10일 금 7, 8 교시)

[2014년 2학기 수학 및 연습 2]

(시간은 30분이고, 40점 만점입니다.)

\* 답안지에 학번과 이름을 쓰시오. 답안 작성시 풀이과정을 명시하시오.

1. (7점) 다음 함수  $f$  가 원점에서 연속이 되도록  $f(0, 0)$  의 값을 정하고,  $f$  가 원점에서 연속임을 보이시오.

$$f(x, y) = xy \frac{x - y}{x^2 + y^2}$$

2. (6점)  $\omega = f(x - y, y - z, z - x)$  일 때  $\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0$  임을 보이시오.

3. (7점) 점  $(1, 1, 0)$  에서 함수  $f(x, y, z) = \log(x^2 + y^2 - 1) + y + 6z$  가 가장 빠르게 증가하는 방향(단위벡터)과 가장 빠르게 감소하는 방향(단위벡터)을 구하고 이 방향들에서의 방향미분계수를 구하시오.

4. (7점) 함수

$$z = f(x, y) = \int_0^1 e^{(x-y)t^2} dt$$

의 그래프 위의 점  $(1, 1, 1)$  에서의 접평면의 식을 구하시오.

5. (6점) 다음 대칭행렬은 양행렬이라고 한다. (단,  $a, b, c$  는 실수.)

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

이때  $t$  에 대한 방정식  $\det(A - tI) = 0$  의 근은 모두 양수임을 증명하시오. (여기에서  $I$ 는 2차 단위행렬이다.)

6. (7점) 두 번 미분가능한 함수  $f(x, y)$  에 대해  $\text{grad}f(0, 0) = (3, 2)$  이며  $f''(0, 0) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$  라고 한다. 다음을 구하시오.

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} f(t + t^2, t)$$

### Quiz 1, 2 모범답안 및 채점기준 예시

1. 함수  $f$  가 원점에서 연속이라고 하면  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0)$  이 성립한다.  $y = x$  를 따라 이 극한을 취하면  $f(0,0) = 0$  이어야 함을 알 수 있다. (3점)

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left| xy \frac{x-y}{x^2+y^2} \right| \leq \left| \frac{(x^2+y^2)(x-y)}{2(x^2+y^2)} \right| \leq \frac{1}{2}|x-y| \text{ 이므로 함수 } f \text{ 는 원점에서 연속이다. (7점)}$$

(단, 산술평균·기하평균의 부등식을 주어진 함수  $f$  의 분모에 적용할 경우 3점 감점.)

2. 연쇄법칙에 의해서  $\frac{\partial w}{\partial x} = D_1 f \cdot 1 + D_3 f \cdot (-1)$ ,  $\frac{\partial w}{\partial y} = D_1 f \cdot (-1) + D_2 f \cdot 1$ ,  $\frac{\partial w}{\partial z} = D_2 f \cdot (-1) + D_3 f \cdot 1$ 이다.  
따라서  $\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ 이다. (6점)

3. 함수  $f$  의 주어진 점에서의 기울기 벡터는  $\text{grad} f(1,1,0) = (2,3,6)$  이다. (3점)

따라서 가장 빨리 증가하는 방향은  $\frac{1}{7}(2,3,6)$  이고 가장 빠르게 감소하는 방향은  $-\frac{1}{7}(2,3,6)$  이다. (5점)

각각의 방향미분계수는  $D_{\frac{1}{7}(2,3,6)} f(1,1,0) = \text{grad} f(1,1,0) \cdot \frac{1}{7}(2,3,6) = 7$  이고  $D_{-\frac{1}{7}(2,3,6)} f(1,1,0) = -7$  이다. (7점)

4. 그래프는  $g(x, y, z) = f(x, y) - z$  의 0-등위면이다.

$$\text{grad}g(1, 1, 1) = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -1) \text{ 이므로} \quad (5\text{점})$$

$$\frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{3}(y-1) - (z-1) = 0$$

, 즉  $x - y - 3z + 3 = 0$  이 원하는 접평면의 방정식이다. (7점)

5. 구하는 방정식은  $t^2 - (a+c)t + (ac-b^2) = 0$  이다. 먼저 판별식을 구하면  $D = (a+c)^2 - 4(ac-b^2) = (a-c)^2 + 4b^2 \geq 0$  이므로 항상 실근을 갖는다. 양행렬이라는 조건에서 두 근의 곱은  $ac - b^2 > 0$  이다. 한편  $ac > b^2$  이므로  $ac$  는 양수다. 양행렬 조건에 의해  $a > 0$  이므로  $c > 0$  도 성립한다. 방정식의 두 근의 합이  $a+c$  이므로 이는 양수다. 따라서 두 실근은 합과 곱이 양수이므로, 양근이어야 한다. (7점)  
(단, 판별식  $D$  를 확인하지 않으면 -3점.)

6.  $f(t+t^2, t)$ 를  $t$ 로 한 번 미분하면

$$(1+2t)D_1f(t+t^2, t) + D_2f(t+t^2, t)$$

이다. (2점)

따라서 한 번 더 미분하면

$$2D_1f(t+t^2, t) + (1+2t)((1+2t)D_1^2f(t+t^2, t) + D_2D_1f(t+t^2, t)) \\ + (1+2t)D_1D_2f(t+t^2, t) + D_2^2f(t+t^2, t)$$

이다. (5점)

따라서

$$2D_1f(0, 0) + (D_1^2f(0, 0) + D_2D_1f(0, 0)) + D_1D_2f(0, 0) + D_2^2(0, 0) = 10 \quad (7\text{점})$$