

Quiz 1, 2 (10월 13일 월 7, 8교시)

[2014 수학 및 연습 2]

(시간은 30분이고, 40점 만점입니다)

* 답안지에 학번과 이름을 쓰시오. 답안 작성시 풀이과정을 명시하시오.

1. (15점) 좌표평면에서 정의된 함수

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

에 대하여 물음에 답하시오.

- (a) (5점) $\text{grad} f(0, 0)$ 을 구하시오.
 - (b) (5점) 단위벡터 $\mathbf{u} = (a, b)$ 에 대하여, $|D_{\mathbf{u}}f(0, 0)| \leq 1$ 임을 보이시오.
 - (c) (5점) f 는 $(0, 0)$ 에서 미분불가능함을 보이시오.
2. (5점) 미분가능한 함수 $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 에 대하여 $F(u, v) := f(x, y)$ 라고 하고 $x = u \cos \theta - v \sin \theta$, $y = u \sin \theta + v \cos \theta$ 일 때, 다음 등식이 성립함을 보이시오. (단, θ 는 상수이다.)

$$\left(\frac{\partial}{\partial u} F(u, v) \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial v} F(u, v) \right)^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right)^2$$

3. (7점) 함수 $f(x, y) = e^x \log(1 + y)$ 에 대하여 $f(0.1, 0.2)$ 의 일차 근사값을 구하시오. 이때, 오차는 0.1 을 넘지 않음을 설명하시오. (단, $e^{0.1}$ 의 값은 2 보다 작다는 사실을 이용해도 좋다.)
4. (6점) 함수 $f(x, y) = 2xy^2 - x^2 - 2y^2 + 1$ 의 임계점을 모두 구하고 구한 점들이 극댓점인지 극솟점인지 안장점인지를 판정하시오.
5. (7점) 부피가 2π 인 수직 원기둥의 겉넓이의 최솟값을 라그랑주 승수법을 이용하여 구하시오. (단, 최솟값의 존재는 증명하지 않아도 됨.)

Quiz 1, 2 모범답안 및 채점기준 예시

$$1. \quad (a) \quad D_1 f(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - 0}{t} = 1, \quad (2\text{점})$$

$$D_2 f(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{t} = 0 \quad (4\text{점})$$

$$\Rightarrow \text{grad} f(0, 0) = (1, 0). \quad (5\text{점})$$

$$(b) \quad D_{\mathbf{u}} f(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(ta, tb) - f(0, 0)}{t} \\ = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a^3 t^3}{t(a^2 t^2 + b^2 t^2)} = \frac{a^3}{a^2 + b^2} = a^3 \quad (4\text{점})$$

$$\Rightarrow |D_{\mathbf{u}} f(0, 0)| = |a^3| \leq 1. \quad (5\text{점})$$

(c) $a \neq 0, b \neq 0$ 인 단위벡터 (a, b) 를 생각하자.

$$aD_1 f(0, 0) + bD_2 f(0, 0) = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0 \neq a^3 = D_{(a,b)} f(0, 0)$$

이므로 f 는 원점에서 미분불가능이다. (7점)

$$2. \quad \frac{\partial}{\partial u} F(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta, \quad (2\text{점})$$

$$\frac{\partial}{\partial v} F(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} (-\sin \theta) + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \theta, \quad (4\text{점})$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial u} F(u, v) \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial v} F(u, v) \right)^2 \\ = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \cos \theta - \frac{\partial f}{\partial x} \sin \theta \right)^2 \\ = \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right)^2. \quad (5\text{점})$$

3. 근사다항식의 정의 혹은 테일러 전개의 유일성을 활용하면 $T_1f(x, y) = y$ 임을 알 수 있다. (2점)

그러므로 원하는 근사값은 0.2 이다. (4점)

일차 근사값의 오차의 한계를 얻기 위해 f 의 이계 편도함수들을 계산해 보면,

$$D_1^2f(x, y) = e^x \log(1 + y), \quad D_1D_2f(x, y) = \frac{e^x}{1 + y}, \quad D_2^2f(x, y) = -\frac{e^x}{(1 + y)^2}$$

이다. $0 \leq t \leq 1$ 일 때,

$$\begin{aligned} |D_1^2f(t(0.1, 0.2))| &= |e^{0.1t} \log(1 + 0.2t)| \leq 2 \\ |D_1D_2f(t(0.1, 0.2))| &= \left| \frac{e^{0.1t}}{1 + 0.2t} \right| \leq 2 \\ |D_2^2f(t(0.1, 0.2))| &= \left| \frac{e^{0.1t}}{(1 + 0.2t)^2} \right| \leq 2 \end{aligned}$$

이므로,

$$\begin{aligned} |R_1f((0, 0), (0.1, 0.2))| &\leq \frac{M_2}{2} (|0.1| + |0.2|)^2 \\ &\leq \frac{2}{2} \cdot 0.09 \leq 0.1 \end{aligned}$$

와 같이 원하는 결론을 얻는다. (7점)

4. $\text{grad}f(x, y) = (2y^2 - 2x, 4xy - 4y)$ 이다. 연립방정식 $(2y^2 - 2x, 4xy - 4y) = (0, 0)$ 을 풀면 $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(1, -1)$ 이 임계점임을 안다. 헤세 행렬을 계산해 보면

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} -2 & 4y \\ 4y & 4x - 4 \end{pmatrix}$$

이다.

$$f''(0, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

은 음행렬이므로 $(0, 0)$ 은 극대점이며, $\det f''(1, 1) < 0$, $\det f''(1, -1) < 0$ 이므로 $(1, 1)$, $(1, -1)$ 은 안장점이다. (6점)

5. 원기둥의 밑면의 반지름을 r , 높이를 h 라고 하자. 그리고 $f(r, h) = 2r^2 + 2rh$, $g(r, h) = r^2h$ 라고 두자. 원기둥의 부피가 $\pi r^2h = 2\pi$ 이므로, $g(r, h) = 2$ 일 때 $f(r, h)$ 의 최솟값을 구하면 된다.
최솟점에서 극점이므로, 라그랑주 승수법에 의해 최솟점에서

$$\text{grad}f(r, h) = \lambda \text{grad}g(r, h) \quad (2\text{점})$$

즉, $(4r + 2h) = \lambda(2rh, r^2)$ 이다.

연립방정식을 풀어보면, $2r = h$ 일때 최소가 된다. (5점)

이 때, $r = 1$, $h = 2$ 가 되어 최소 겉넓이는 6π 가 된다. (7점)