

Quiz 1 (9월 27일 금 3, 4교시)

[2013년 2학기 수학 및 연습 2]
(시간은 20분이고, 20점 만점입니다)

* 답안지에 학번과 이름을 쓰시오. 답안 작성시 풀이과정을 명시하시오.

1. (5점) 함수 $f(x, y) = x^2 + y^2$ 의 그래프와 구면 $x^2 + y^2 + z^2 = 30$ 이 교차하는 곡선 위의 한 점 $(1, 2, 5)$ 에서 이 곡선에 접하는 벡터를 하나만 찾으시오.
2. (15점) 좌표평면에서 정의된 함수

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^5 + y^5}{(x^2 + y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

에 대하여 물음에 답하시오.

- (a) (5점) $D_{(x,y)}f(0,0) = f(x, y)$ 임을 보이시오.
- (b) (5점) $\mathbf{v} = (1, -1)$ 이면 $D_{\mathbf{v}}f(0,0) = \text{grad}f(0,0) \cdot \mathbf{v}$ 임을 보이시오.
- (c) (5점) f 는 $(0,0)$ 에서 미분가능하지 않음을 보이시오.

Quiz 1 모범답안 및 채점기준 예시

1. (풀이1)

$g(x, y, z) := x^2 + y^2 - z$, $h(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2$ 이라고 하면,
구하는 접벡터는 g 의 0-등위면과 h 의 30-등위면에 동시에 수직이어야 하므로 (2점)

$$\nabla g(1, 2, 5) \times \frac{1}{2} \nabla h(1, 2, 5) = (2, 4, -1) \times (1, 2, 5) = (22, -11, 0). \quad (5점)$$

(풀이2)

$x^2 + y^2 - z = 0$ 과 $x^2 + y^2 + z^2 = 30$ 의 교선을 구하면

$$x^2 + y^2 = 5, z = 5. \quad (2점)$$

따라서, 곡선 $x^2 + y^2 = 5, z = 5$ 위의 점 $(1, 2, 5)$ 에 접하는 벡터를 구하면 $(2, -1, 0)$ 를 얻는다. (5점)

2. (a) $(x, y) \neq (0, 0)$

$$\Rightarrow D_{(x,y)}f(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tx, ty)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^5(x^5+y^5)}{t^4(x^2+y^2)^2}}{t} = f(x, y), \quad (4점)$$

$$D_{(0,0)}f(0,0) = 0 = f(0,0). \quad (5점)$$

$$(b) D_{\mathbf{v}}f(0,0) = f(\mathbf{v}) = f(1, -1) = 0, \quad (2점)$$

$$\begin{aligned} \text{grad } f(0,0) \cdot \mathbf{v} &= (D_1f(0,0), D_2f(0,0)) \cdot (1, -1) \\ &= f(1,0) - f(0,1) = 1 - 1 = 0 \end{aligned} \quad (5점)$$

$$(\because (1) \text{에 의해서 } D_1f(0,0) = f(1,0), D_2f(0,0) = f(0,1))$$

(c) $\mathbf{v} = (1, 1)$ 이라고 할 때, (1)에 의하여

$$D_{\mathbf{v}}f(0,0) = f(1,1) = \frac{1}{2}, \quad (2점)$$

$$\begin{aligned} \text{grad } f(0,0) \cdot \mathbf{v} &= (D_1f(0,0), D_2f(0,0)) \cdot (1, 1) \\ &= f(1,0) + f(0,1) = 1 + 1 = 2 \end{aligned} \quad (4점)$$

따라서 $D_{\mathbf{v}}f(0,0) \neq \text{grad } f(0,0) \cdot \mathbf{v}$ 이 되어 f 는 $(0,0)$ 에서 미분불능이다. (5점)

* 미분의 정의를 이용하여 풀었을 경우 풀이과정이 맞으면(5점)
(부분점수 없음)