Quiz 3
[고급수학 및 연습 1 (003강좌) - 2017학년도 1학기]
(제한시간: 20분, 만점: 20점)

⋆ 답안지에 학번과 이름을 쓰시오. 답안 작성 시 풀이과정을 명시하시오.

1. $\mathbb{R}^3$ 위의 평면 $\pi : x+y+z=0$ 와 직선 $l(t)=t(1,2,0) \quad (t \in \mathbb{R})$이 주어져 있을 때 다음 물음에 답하시오.

   (a) (3점) $\mathbb{R}^3$의 점 X를 평면 π에 정사영하는 사상 $L_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$과, $\mathbb{R}^3$의 점 X를 직선 l에 대해 대칭시키는 사상 $L_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$가 선형사상임을 보이시오.

   (b) (4점) L_1, L_2에 해당하는 행렬 A_1, A_2를 구하시오.

   (c) (3점) $\mathbb{R}^3$의 점 X를 평면 π에 정사영한 뒤, 그 점을 다시 직선 l에 대해 대칭시킨 점을 Y라 하자.사상 $L_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$가 $L_3X=Y$로 주어졌을 때, L_3에 해당하는 행렬을 A_1, A_2로 나타내시오.

   (풀이) (a) π의 법선벡터는 $(1,1,1)$이며, 같은 방향의 단위벡터는 $v=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^t$이다. 따라서 X를 v방향으로 정사영시킨 벡터는 $(v \cdot X)v$이며, 이를 이용하면 $L_1X = X-(v\cdot X)v$임을 알 수 있다. 따라서

$$L_1(tX+Y)=(tX+Y)-(v\cdot(tX+Y))v=t[X-(v\cdot X)v]+[Y-(v\cdot Y)v]=tL_1X+L_1Y$$

   임을 알 수 있고 L_1은 선형사상이다.
   직선 l의 방향벡터는 $(1,2,0)$이고, 같은 방향의 단위벡터는 $w=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0)$이다. 따라서 X를 l에 정사영시킨 벡터는 $(w\cdot X)w$ 이며, 이를 이용하면 $L_2X=2(w\cdot X)w-X$임을 알 수 있다. 따라서

$$L_2(tX+Y)=2(w\cdot(tX+Y))w-(tX+Y)=t[2(w\cdot X)w-X]+[2(v\cdot Y)v-Y]=tL_2X+L_2Y$$

   임을 알 수 있고 L_2는 선형사상이다.
   (b) $L_1X=X-(v\cdot X)v$임을 이용하면,
   $L_1e_1=L_1(1,0,0)^t=(1,0,0)^t-(v\cdot(1,0,0)^t)v=(2/3,-1/3,-1/3)^t$
   이고, 같은 방법으로

$L_1e_2 = (-1/3, 2/3, -1/3)^t, L_1e_3 = (-1/3, -1/3, 2/3)^t$를 구할 수 있다.
따라서

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

임을 알 수 있다. 같은 방법으로 $L_2X = 2(w \cdot X)w - X$임을 이용하여 L_2e_1, L_2e_2, L_2e_3를 계산하여 A_2를 구하면,

$$A_2 = \begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 & 0 \\ 4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

이다.
(c)$Y = L_2(L_1X)$이므로, $L_3 = L_2L_1$이다.따라서, L_3에 대응하는 행렬은 A_2A_1임을 알 수 있다.

2. 다음 물음에 답하여라.

 (a) (5점) 자연수 n에 대해 $a_1, a_2, \ldots, a_n$이 서로 다른 실수일 때, n개의 벡터 $(1, a_1, a_1^2, ..., a_1^{n-1}), (1, a_2, a_2^2, ..., a_2^{n-1}), \ldots, (1, a_n, a_n^2, ..., a_n^{n-1})$ 이 일차독립임을 증명하시오.

 (b) (5점) 주어진 $n \times n$ 행렬 A와 영벡터가 아닌 n개의 $n-$벡터 $v_1, ..., v_n$이 서로 다른 실수 $a_1, a_2, \ldots, a_n$에 대해

$$Av_i = a_iv_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

 을 만족할 때, $v_1, ..., v_n$이 일차독립임을 증명하시오.

(풀이) (a)n에 대한 수학적 귀납법을 사용한다. $n = 1$일 때는 자명하므로, $n - 1$에 대해 성립한다고 가정하고, n에 대해 증명한다.
실수 $t_1, \ldots, t_n$이

$$t_1(1, a_1, ..., a_1^{n-1}) + \cdots + t_n(1, a_n, ..., a_n^{n-1}) = 0$$

을 만족한다면, 순서쌍 $(t_1, \ldots, t_n)$은 다음 연립방정식

$$\begin{cases} t_1 + t_2 + ... + t_n = 0 & \cdots (1) \\ a_1t_1 + a_2t_2 + ... + a_nt_n = 0 & \cdots (2) \\ \quad \cdots & \\ a_1^{n-1}t_1 + a_2^{n-1}t_2 + ... + a_n^{n-1}t_n = 0 & \cdots (n) \end{cases}$$

을 만족한다. 처음 두 식을 이용해 $(2) - a_1(1)$ 을 계산하여 t_1을 소거하면

$$(a_2 - a_1)t_2 + ... + (a_n - a_1)t_n = 0$$

를 얻을 수 있고, 같은 방법으로 $(k+1) - a_1(k)$를 통해 t_1을 소거하면 $(n-1)$개의 연립방정식

$$\begin{cases} (a_2 - a_1)t_2 + ... + (a_n - a_1)t_n = 0 \\ (a_2 - a_1)a_2t_2 + ... + (a_n - a_1)a_nt_n = 0 \\ \qquad \cdots \\ (a_2 - a_1)a_2^{n-2}t_2 + ... + (a_n - a_1)a_n^{n-2}t_n = 0 \end{cases}$$

을 얻는다.
$k = 2, 3, \ldots, n$에 대해 $s_k = (a_k - a_1)t_k$라 정의하면, 위의 연립방정식을

$$\begin{cases} s_2 + ... + s_n = 0 \\ a_2s_2 + ... + a_ns_n = 0 \\ \qquad \cdots \\ a_2^{n-2}s_2 + ... + a_n^{n-2}s_n = 0 \end{cases}$$

로 다시 쓸 수 있다. 또한 이 연립방정식은

$$s_2(1, a_2, a_2^2, ..., a_2^{n-2}) + \cdots + s_n(1, a_n, a_n^2, ..., a_n^{n-2})$$

으로도 표현할 수 있다. 귀납가정에 의해 $(n-1)$개의 벡터$(1, a_2, a_2^2, ..., a_2^{n-2}), \ldots, (1, a_n, a_n^2, ..., a_n^{n-2})$는 일차독립이고, 따라서 $s_2 = s_3 = \cdots = s_n = 0$임을 알 수 있다.
$s_k = (a_k - a_1)t_k$와 $a_k \neq a_1$으로부터 $t_2 = t_3 = \cdots = t_n = 0$이며, 이를 처음 연립방정식에 대입하면 $t_1 = 0$도 구할 수 있다.
따라서 t_k들은 모두 0이고,
$(1, a_1, a_1^2, ..., a_1^{n-1}), (1, a_2, a_2^2, ..., a_2^{n-1}), \ldots, (1, a_n, a_n^2, ..., a_n^{n-1})$이 일차독립임을 알 수 있다.
귀납법에 의해 모든 n에 대해 성립한다.
(b)실수 $t_1, \ldots, t_n$에 대해 $t_1v_1 + \cdots + t_nv_n = 0$이라면, $t_iv_i = w_i$라 할 때, $Aw_i = a_iw_i$임을 알 수 있고,

$$w_1 + w_2 + \cdots + w_n = 0$$

이다. 위 식의 양변에 A를 곱하면,

$$a_1w_1 + \cdots + a_nw_n = A(w_1 + \cdots + w_n) = 0$$

이며, 이 과정을 계속 반복하면

$$\begin{cases} w_1 + w_2 + ... + w_n = 0 \\ a_1 w_1 + a_2 w_2 + ... + a_n w_n = 0 \\ \qquad \cdots \\ a_1^{n-1} w_1 + a_2^{n-1} w_2 + ... + a_n^{n-1} w_n = 0 \end{cases}$$

을 얻을 수 있다. 따라서 (a)의 결과에 의해 $w_1 = w_2 = \cdots = w_n = 0$ 이며, v_i들이 영벡터가 아니므로, $t_1 = \cdots = t_n = 0$임을 알 수 있다. 따라서 $v_1, \ldots, v_n$은 일차독립이다.